ベクトル88

すべての面が合同な三角形である四面体OABCを考える。この四面体について

$\mathrm{OA}=\sqrt{3}$, $\mathrm{OB}=2$, $\mathrm{OC}=\sqrt{5}$

とする。

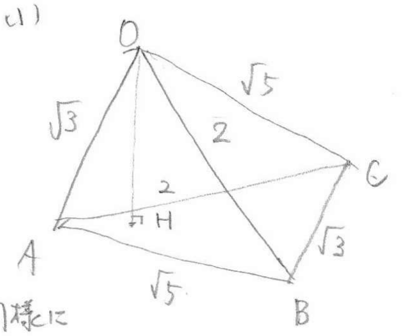
(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をそれぞれ求めよ。

(2) 点Oから3点A, B, Cを含む平面に下ろした垂線をOHとするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(3) 四面体OABCの体積を求めよ。

〔札幌医科大〕

(1)



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ として両辺2乗すると

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$5=4-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+3$

$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ $\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$

同様に

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ $\quad 3=5-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+4$ $\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$ $\quad 4=5-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+3$ $\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2$

(2) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とすると $\overrightarrow{OH}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ ∵ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より 内積 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ なので $(1-s-t)\vec{a}(\vec{b}-\vec{a})+s\vec{b}(\vec{b}-\vec{a})+t\vec{c}(\vec{b}-\vec{a})=0$

$-2(1-s-t)+3s+t=0$ $\quad 5s+3t=2$ …①

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より 内積 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ なので $(1-s-t)\vec{a}(\vec{c}-\vec{a})+s\vec{b}(\vec{c}-\vec{a})+t\vec{c}(\vec{c}-\vec{a})=0$

$-(1-s-t)+2s+3t=0$ $\quad 3s+4t=1$ …②

①②より

$$\begin{array}{rr} & 15s+9t=6 \\ -) & 15s+20t=5 \\ \hline & -11t=1 \end{array}$$

$t=-\frac{1}{11}$ $\quad s=\frac{5}{11}$ となるので $\overrightarrow{OH}=(1-\frac{5}{11}+\frac{1}{11})\vec{a}+\frac{5}{11}\vec{b}-\frac{1}{11}\vec{c}$

$\therefore \overrightarrow{OH}=\frac{7}{11}\vec{a}+\frac{5}{11}\vec{b}-\frac{1}{11}\vec{c}$

(3)

$|\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{11}\sqrt{49|\vec{a}|^2+70\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2-2\vec{c}(7\vec{a}+5\vec{b})+|\vec{c}|^2}=\frac{1}{11}\sqrt{264}=\frac{2\sqrt{66}}{11}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=3-1-2+3=3$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}^2\cdot 2^2-3^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

よって四面体OABCの体積Vは $\quad V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{66}}{11}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ $\quad \frac{\sqrt{6}}{3}$