ベクトル89 ✓

$\triangle$ABC において, AB=3, AC=5, BC=$2\sqrt{6}$ とする。$\triangle$ABC の外心を O とし, O から辺 AB に下ろした垂線と AB の交点を M, O から辺 AC に下ろした垂線と AC の交点を N, 直線 AO と辺 BC の交点を D とする。このとき, 次の問いに答えよ。

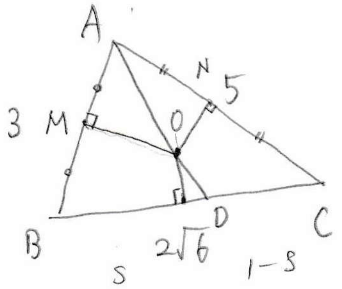
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|$ の値を求めよ。

(3) BD : DC=$s : 1-s$, $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{MO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NO}}$ をそれぞれ, k, s, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

〔滋賀大〕



(1) 余弦定理より ∠BAC=θ とおくと

$24 = 9 + 25 - 2\cdot 3\cdot 5\cos\theta$

$30\cos\theta = 10$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$ ∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\cdot 5\cdot\frac{1}{3} = 5$ 　 $\underline{5}$

(2) AOは外接円の半径 $\cos\theta = \frac{1}{3}$ より $\sin\theta = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

正弦定理より $\frac{2\sqrt{6}}{\sin\theta} = 2R$ であるから ∵ RはAOと同値

$R = \sqrt{6} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{6}\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ∴ $\underline{|\overrightarrow{AO}| = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AC} + (1-s)\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AO} = sk\overrightarrow{AC} + (1-s)k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + sk\overrightarrow{AC} + (1-s)k\overrightarrow{AB} = (k - sk - \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + sk\overrightarrow{AC}$ …(答)

$\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + sk\overrightarrow{AC} + (1-s)k\overrightarrow{AB} = (1-s)k\overrightarrow{AB} + (sk - \frac{1}{2})\overrightarrow{AC}$ …(答)

(4) $\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AB}$ 　 $\overrightarrow{NO} \perp \overrightarrow{AC}$ より

$(k - sk - \frac{1}{2})|\overrightarrow{AB}|^2 + sk\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ 　 $9(k - sk - \frac{1}{2}) + 5sk = 0 \to 9k - 4sk = \frac{9}{2}$ …①

$(k - sk)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + (sk - \frac{1}{2})|\overrightarrow{AC}|^2 = 0$ 　 $5(k - sk) + 25(sk - \frac{1}{2}) = 0$ 　 $5k + 20sk = \frac{25}{2}$ …②

①,②を解いて $k = \frac{7}{10}$ 　 $s = \frac{9}{14}$ 　 ∴ $\underline{\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{20}\overrightarrow{AC}}$