ベクトル90

四面体 OABC において

$$\mathrm{OA}=1, \mathrm{OB}=3, \mathrm{OC}=2, \angle\mathrm{AOB}=90^\circ, \angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$$

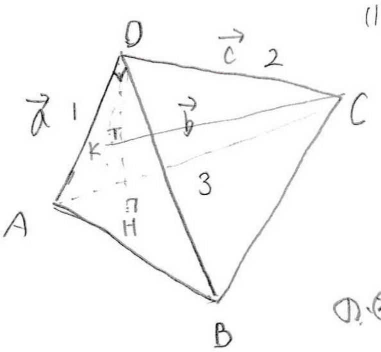
とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく, 次の問いに答えよ。

(1) 平面 ABC 上に点 H をとり, s, t, u を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおく。このとき, $s+t+u=1$ となることを示せ。

(2) (1) の $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直であるとき, s, t, u の値をそれぞれ求めよ。

(3) 平面 OAB 上に点 K をとり, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直であるとする。このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表し, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ。

〔長崎大〕



(1) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$ とするとき …①

$\overrightarrow{AH}$ は平面ABC上にあるので

$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$

$=k(\vec{b}-\vec{a})+l(\vec{c}-\vec{a})$ …②

①,②より $\overrightarrow{OH}=\vec{a}+k(\vec{b}-\vec{a})+l(\vec{c}-\vec{a})$

$=(1-k-l)\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}$ となり

$1-k-l=s$, $k=t$, $l=u$ とするとき $s+t+u=1$ となる.

(2) $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$, 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=2\cos120^\circ=-1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=6\cos120^\circ=-3$

$\{(1-k-l)\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}\}(\vec{b}-\vec{a})=k|\vec{b}|^2+l\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-k-l)|\vec{a}|^2-l\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=9k-3l-(1-k-l)+l=10k-l-1=0$ …①

$\{(1-k-l)\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}\}(\vec{c}-\vec{a})=(1-k-l)\vec{a}\cdot\vec{c}+k\vec{b}\cdot\vec{c}+l|\vec{c}|^2-(1-k-l)|\vec{a}|^2-l\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=-(1-k-l)-3k+4l-(1-k-l)+l$

$=-k+7l-2=0$ …②

$\begin{cases}10k-l=1\\ -k+7l=2\end{cases}$

$\begin{array}{rl} & 70k-7l=7\\ +) & -k+7l=2\\ \hline & 69k=9\end{array}$

$k=\frac{3}{23}=t$

$\begin{array}{rl} & 10k-l=1\\ +) & -10k+70l=20\\ \hline & 69l=21\end{array}$

$l=\frac{7}{23}=u$

$1-\frac{7}{23}-\frac{3}{23}=\frac{13}{23}=s$ $\therefore s=\frac{13}{23}$, $t=\frac{3}{23}$, $\frac{7}{23}$

(3) $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OK}=p\vec{a}+q\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{CK}\perp\vec{a}$, $\overrightarrow{CK}\perp\vec{b}$ より $p|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ $p=-1$

$q|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=9q+3=0$ $q=-\frac{1}{3}$ $\therefore\overrightarrow{OK}=-\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$|\overrightarrow{CK}|=\sqrt{\left(-\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2-2\vec{c}\left(-\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)+|\vec{c}|^2}=\sqrt{1+1-2-2+4}=\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{CK}|=\sqrt{2}$ よって体積は $\frac{1}{3}\times1\times3\times\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$