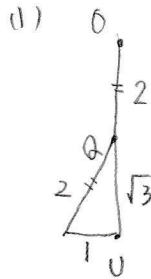
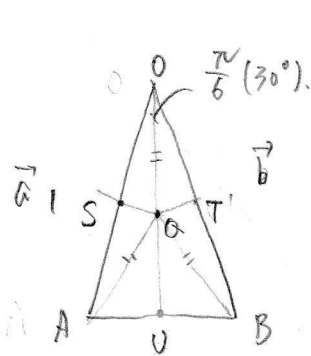


三角形 OAB で  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$  とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 三角形 OAB の外接円の中心 (外心) Q の位置ベクトル  $\vec{OQ}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  で表せ。
- (2) 頂点 O と A からそれぞれの対辺 AB と OB にもろした垂線の交点 (垂心) を H とするとき、 $\vec{OH}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表せ。
- (3)  $|\vec{AB}|$  の値を求めよ。
- (4) 三角形 OAB の内接円の中心 (内心) P の位置ベクトル  $\vec{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表せ。



[大分大]

$$OQ : QV = 2 : \sqrt{3} \text{ (J)}$$

$$\vec{OV} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{OQ} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \vec{OV}$$

$$= 2(2 - \sqrt{3}) \vec{OV} = \underline{\underline{(2 - \sqrt{3})(\vec{a} + \vec{b})}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{OH} = 2\vec{OV} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{OB} = (\vec{OH} - \vec{OA}) \cdot \vec{OB} = 0$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$l = 2(2\sqrt{3} - 3)$$

∴

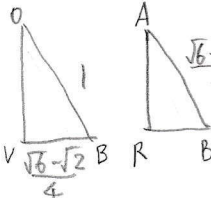
$$\vec{OH} = (2\sqrt{3} - 3)(\vec{a} + \vec{b})$$

余弦定理より

$$AB^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

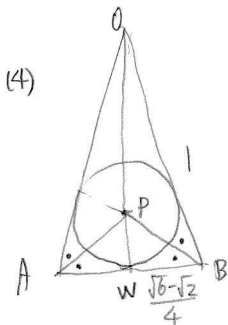
$$AB = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$



$$OR = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} \quad AH : HR = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 : \sqrt{3}$$

$$\therefore \vec{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \vec{a} + \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{b} = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \vec{a} + \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \vec{b} = \underline{\underline{(2\sqrt{3} - 3)(\vec{a} + \vec{b})}}$$

$$(3) |\vec{AB}| = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$



$$OP : PW = 1 : \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 4 : (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 4} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 4} (\vec{a} + \vec{b})$$