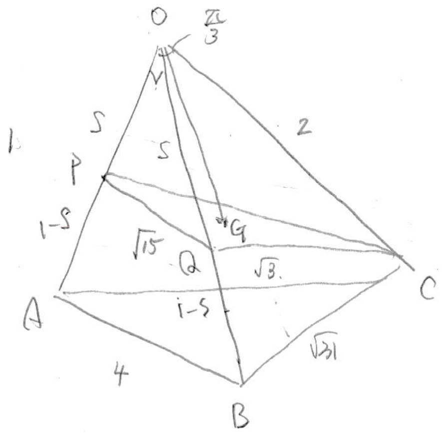

(1)

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PG}$, $\overrightarrow{OP} = s\vec{a}$

$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PC})$

$= \frac{1}{3}\{(s\vec{b} - s\vec{a}) + (\vec{c} - s\vec{a})\}$

$= \frac{1}{3}(-2s\vec{a} + s\vec{b} + \vec{c})$

よって

$\overrightarrow{OG} = s\vec{a} + \frac{1}{3}(-2s\vec{a} + s\vec{b} + \vec{c})$

$= \dfrac{s\vec{a} + s\vec{b} + \vec{c}}{3}$

(2)

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ $\vec{a}\cdot\vec{c} = 1\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 1$

$\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB}$ …① $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AC}$ …② より s, cosθを求める

①より

$\left(\dfrac{s\vec{a}+s\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)(\vec{b}-\vec{a}) = 0$

$\frac{1}{3}(\cancel{s\vec{a}\cdot\vec{b}} - s|\vec{a}|^2 + s|\vec{b}|^2 - \cancel{s\vec{a}\cdot\vec{b}} + \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c}) = 0$

$14s + \vec{b}\cdot\vec{c} = 1$ …③

②より

$\left(\dfrac{s\vec{a}+s\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)(\vec{c}-\vec{a}) = 0$

$\frac{1}{3}(s\vec{a}\cdot\vec{c} - s|\vec{a}|^2 + s\vec{b}\cdot\vec{c} - \cancel{s\vec{a}\cdot\vec{b}} + |\vec{c}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{c}) = 0$

$\cancel{s} - \cancel{s} + s\vec{b}\cdot\vec{c} + 4 - 1 = 0$

$s\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = -3$ …④

③より $\vec{b}\cdot\vec{c} = 1 - 14s$ より

$s(1-14s) = -3$

$14s^2 - s - 3 = 0$

$(2s-1)(7s+7) = 0$

$0 < s < 1$ より $s = \frac{1}{2}$

これを④に代入して

$\vec{b}\cdot\vec{c} = -6$

$2\sqrt{15}\cos\theta = -6$

$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{15}}$

$s = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{15}}$

(b) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right)$

$= \frac{1}{6}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$

$|\overrightarrow{OG}|^2 = \frac{1}{36}\left(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 + 4\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + 4|\vec{c}|^2\right)$

$= \frac{1}{36}(1 + 15 + 4 + 4(-6) + 4\cdot2^2)$

$= \frac{1}{36}\cdot12$

$= \frac{1}{3}$

$|\overrightarrow{OG}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$AB = 4$ (三平方)

△OACで余弦定理

$AC^2 = 1 + 4 - 2\cdot1\cdot2\cos\frac{\pi}{3}$

$= 3$

$AC = \sqrt{3}$

△OBCで余弦定理

$BC^2 = 15 + 4 - 2\cdot\sqrt{15}\cdot2\left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$

$= 31$

$BC = \sqrt{31}$

△ABCで余弦定理 ∠BAC = x とすると

$31 = 16 + 3 - 2\cdot4\sqrt{3}\cos x$

$12 = -8\sqrt{3}\cos x$

$\cos\theta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ よって $x = \frac{5}{6}\pi$ $(0 < x < \pi)$

よって

$OG = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $BC = \sqrt{31}$, $\angle BAC = \frac{5}{6}\pi$

(c)

立体の高さを表すベクトルを $\overrightarrow{OP}$ とすると

$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}k\vec{a} + \frac{1}{6}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c}$

Pは平面ABC上にあるので

$\frac{1}{6}k + \frac{1}{6}k + \frac{1}{3}k = 1$

$k = \frac{3}{2}$

よって $|\overrightarrow{OP}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{OG}| = \frac{3}{2\sqrt{3}}$

△ABCの面積は $\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{3}\sin\frac{5}{6}\pi = \sqrt{3}$

よって求める体積Vは

$V = \sqrt{3} \times \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$V = \frac{1}{2}$