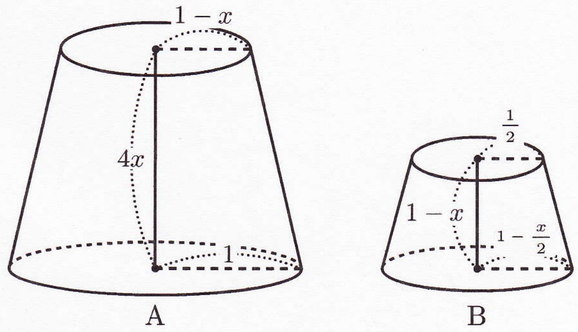
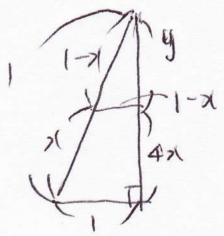
図のように底面の半径 1, 上面の半径 $1-x$, 高さ $4x$ の直円錐台Aと, 底面の半径 $1-\frac{x}{2}$, 上面の半径 $\frac{1}{2}$, 高さ $1-x$ の直円錐台Bがある。ただし, $0 \leqq x \leqq 1$ である。AとBの体積の和を $V(x)$ とするとき, $V(x)$ の最大値を求めなさい。 〔東大文系〕



立体Aの体積を V_A 立体Bの体積を V_B とすると



V_A = 半径1の円錐 − 半径 $(1-x)$ の円錐より求める…①

左図より $1-x : x = y : 4x$

$xy = 4x(1-x)$ $x \neq 0$ より

$y = 4 - 4x$ …②

$V_A = \frac{1}{3}\pi(4x+y) - \frac{1}{3}\pi(1-x)^2 y$

$= \frac{4}{3}\pi x + \frac{1}{3}\pi y - \frac{1}{3}\pi y + \frac{2}{3}\pi xy - \frac{1}{3}\pi x^2 y$

$= -\frac{1}{3}\pi x^2 y + \frac{4}{3}\pi x + \frac{2}{3}\pi xy$ …③

②より 計算して

$V_A = \frac{4}{3}\pi x^3 - 4\pi x^2 + 4\pi x$

V_B も同様にして求めると

$V_B = -\frac{1}{12}\pi x^3 + \frac{1}{2}\pi x^2 - \pi x - \frac{7}{12}x$

$V(x) = V_A + V_B$

$= \left(\frac{4}{3}\pi x^3 - 4\pi x^2 + 4\pi x\right) + \left(-\frac{1}{12}\pi x^3 + \frac{1}{2}\pi x^2 - \pi x - \frac{7}{12}x\right)$

$= \frac{15}{12}\pi x^3 - \frac{7}{2}\pi x^2 + 3\pi x - \frac{7}{12}\pi$

$V(x) = \frac{\pi}{12}(15x^3 - 42x^2 + 36x - 7)$

これを微分して

$V'(x) = \frac{\pi}{4}(15x^2 - 28x + 12)$

$= \frac{\pi}{4}(3x-2)(5x-6)$

$0 \leqq x \leqq 1$ において

x	0	…	$\frac{2}{3}$	…	1
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	極大	↘	

となり $x = \frac{2}{3}$ で極大値 $\frac{151}{108}\pi$ をとる