3 次曲線 $y = x^3 - kx$ 上のある点 P における接線が, この曲線上の他の点 Q と交わり Q における接線と直交するという。このとき, 実数 k の範囲を求めよ。〔和歌山大〕

$f(x) = x^3 - kx$ とおく

P を $P(t,\ t^3 - kt)$ とすると P における接線は

$f'(x) = 3x^2 - k$ より

$y = (3t^2 - k)(x - t) + t^3 - kt$

$y = (3t^2 - k)x - 2t^3$

$f(x)$ と $y = (3t^2 - k)x - 2t^3$ は P で接することから

$y = f(x)$ として

$(3t^2 - k)x - 2t^3 = x^3 - kx$

$x^3 - 3t^2 x + 2t^3 = 0$

$(x - t)^2(x + 2t) = 0$. $x = t, -2t$

Q の x 座標は $-2t$ である.

P における接線と Q における接線が直交するから

$f'(t) \cdot f'(-2t) = -1$ である.

$(3t^2 - k)(12t^2 - k) = -1$

$36t^4 - 15kt^2 + k^2 + 1 = 0$

$t^2 = X$ とおくと

$36X^2 - 15kX + k^2 + 1 = 0$ …①

①が異なる二つの実数解をもてばよいので

$225k^2 - 4 \cdot 36 \cdot (k^2 + 1) \geqq 0$

$9k^2 - 16 \geqq 0$

$(3k + 4)(3k - 4) \geqq 0$

$k \geqq \frac{4}{3},\ k \leqq -\frac{4}{3}$ …②

①の2つの異なる解を α、β とすると

$\alpha + \beta \geqq 0$

$\frac{15}{36}k \geqq 0$ 　 $k \geqq 0$ …③

$\alpha\beta \geqq 0$

$\frac{k^2 + 1}{36} \geqq 0$ 　 k は任意の実数 …④

②, ③, ④より

$k \geqq \frac{4}{3}$ //