2つの異なる放物線

$$x^2 = 4k(y+k), \qquad x^2 = 4h(y+h)$$

が点 $\mathrm{P}(a, b)$ を通るとする。このとき, P におけるこれらの放物線の接線は直交することを証明せよ。 〔お茶の水女子大〕

$x^2 = 4k(y+k)$ より

$4ky = x^2 - 4k^2$ …①

$y = \dfrac{x^2 - 4k^2}{4k}$ …②

$x^2 = 4h(y+h)$ より

$4hy = x^2 - 4h^2$ …③

$y = \dfrac{x^2 - 4h^2}{4h}$ …④

②より $y' = \dfrac{x}{2k}$ ③より $y' = \dfrac{x}{2h}$

であるから $P(a, b)$ における

接線の傾きはそれぞれ

$\dfrac{a}{2k}$, $\dfrac{a}{2h}$ となり題意より

$\dfrac{a}{2k} \cdot \dfrac{a}{2h} = \dfrac{a^2}{4kh} = -1$ となる

ことを証明すればよい

①、③に $P(a, b)$ を代入すると

$4kb = a^2 - 4k^2$

$4hb = a^2 - 4h^2$

となり a^2 を消去すると

$4kb - 4hb = -4k^2 + 4h^2$

$4b(k-h) = -4(k+h)(k-h)$

$(k-h)(b+k+h) = 0$ …⑤

⑤より

$k = h$, $b+k+h = 0$

となり $k \neq h$ より

$b + k + h = 0$

すなわち $b = -k - h$ となる。

②より $P(a, b)$ の関係は

$b = \dfrac{a^2 - 4k^2}{4k}$ となり

$b = -k - h$ を代入すると

$-k - h = \dfrac{a^2 - 4k^2}{4k}$

$\cancel{-4k^2} - 4kh = a^2 \cancel{-4k^2}$

$a^2 = -4kh$ となる

よって $\dfrac{a^2}{4kh} = \dfrac{-4kh}{4kh} = -1$

となり

放物線の2つの接線は

直交する。