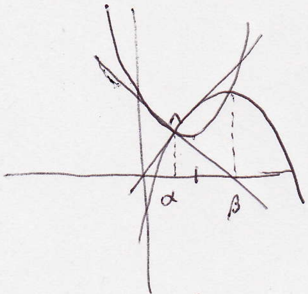
2つの放物線

$$y=x^2-2x+2\cdots① \qquad y=-x^2+ax+b\cdots②$$

は, それらの交点の1つPで, 接線が互いに直交しているものとする。このとき, 放物線②は, a,bの値に関係なく一定の点Qを通ることを証明し, Qの座標を求めよ。　〔東大文科〕



①、②より

$x^2-2x+2=-x^2+ax+b$

$2x^2+(-2-a)x+2-b=0$

2つの解をα, βとすると解と係数の関係より

$\alpha+\beta=\dfrac{2+a}{2}$, $\alpha\beta=\dfrac{2-b}{2}$ これより $\beta=\dfrac{2+a}{2}-\alpha$

$\alpha\left(\dfrac{2+a}{2}-\alpha\right)=\dfrac{2-b}{2}$ 整理すると $\alpha^2-\left(\dfrac{2+a}{2}\right)\alpha+\dfrac{2-b}{2}=0$ …Ⓐ

また点Pのx座標をαとすると ①より $y'=2x-2$ ②より $y'=-2x+a$

が得られるので直交条件より

$(2\alpha-2)(-2\alpha+a)=-1$

$-4\alpha^2+2a\alpha+4\alpha-2a+1=0$

$4\alpha^2-2(a+2)\alpha+2a-1=0$ …Ⓑ

ここで Ⓐ×4 より

$4\alpha^2-2(a+2)\alpha+2(2-b)=0$ が得られ、これとⒷより

$$\begin{array}{rl} & 4\alpha^2-2(a+2)\alpha+2(2-b)=0 \\ -) & 4\alpha^2-2(a+2)\alpha+2a-1=0 \\ \hline & 4-2b-2a+1=0 \end{array}$$

$2a+2b=5$

$a+b=\dfrac{5}{2}$ …Ⓒ

ここで②において $x=1$ とすると

$y=-1+a+b$ が得られ この値はⒸより

a、bの値に関係なく

$y=-1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$ となることが

分かる。これが点Qであり

その座標は$Q\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$である