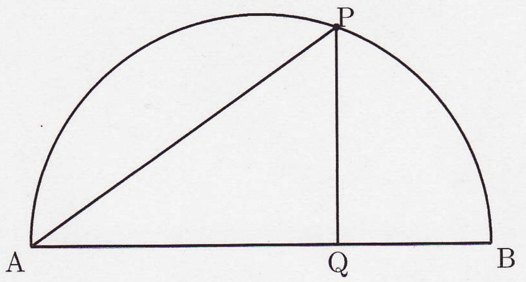
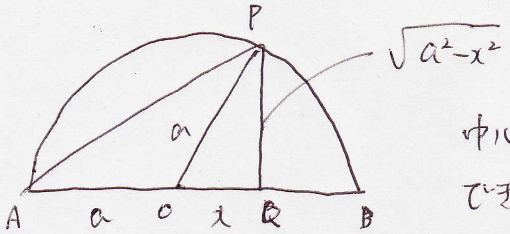
右の図で AB$=2a$ とする。AB を直径とする半円周上に点 P をとり，P から AB におろした垂線の足を Q とするとき，△APQ を AB のまわりに回転してできる立体の体積の最大値を求めよ。



〔東大〕



中心をOとし OQ$=x$ とすると
できる立体(円錐)の底面の半径は $\sqrt{a^2-x^2}$ となる

その体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}(a^2-x^2)(a+x)\pi \quad \text{となり}$$

$\frac{1}{3}$ と π を定数としてはぶいたものを

$V(x)=(a^2-x^2)(a+x)$ とし、この関数の極値を求める

$$V(x)=a^3+a^2x-ax^2-x^3$$
$$V'(x)=-3x^2-2ax+a^3$$
$$=(x+a)(-3x+a)$$

よって $x=-a,\ \frac{a}{3}$ で極値をとる

x		$-a$		$\frac{a}{3}$	
$V'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$V(x)$	↘	0	↗	$\frac{32}{27}a^3$	↘

$x=-a$ のとき極小値 0

$x=\frac{a}{3}$ のとき極大値 $\frac{32}{27}a^3$ であることから

$$V=\frac{1}{3}\pi\times\frac{32}{27}a^3 \quad \text{が求める最大値}$$

よって $\frac{32}{81}\pi a^3$