5

$f(x) = 2\sin^3 x - 2\cos^3 x - 4\sin 2x + 5$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ とする。

(1) $t = \sin x - \cos x$ とおくとき, t の変域を求め, $\sin x \cos x$ を t で表わせ。

(2) $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。

〔川崎医大〕

(1) 合成

$t = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

$t^2 = (\sin x - \cos x)^2$
$= 1 - 2\sin x\cos x$ より $\sin x\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$

(2)
$f(x) = 2(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x) - 4\cdot 2\sin x\cos x + 5$
$= 2t\left(1 + \dfrac{1-t^2}{2}\right) - 8\cdot\dfrac{1-t^2}{2} + 5$
$= 2t + t - t^3 - 4 + 4t^2 + 5$

$f(t) = -t^3 + 4t^2 + 3t + 1$ $(-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$f'(t) = -3t^2 + 8t + 3$
$= (-t+3)(3t+1)$ $f'(t) = 0$ より $t = 3, -\frac{1}{3}$ で極値をとる.

t	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$f'(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$f(t)$	↘		↘	極小値	↗		↗	極大値

$(\because -\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

これより.
$t = \sqrt{2}$ のとき最大値をとる
$f(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 8 + 3\sqrt{2} + 1$
$= 9 + \sqrt{2}$

$t = -\frac{1}{3}$ のとき最小値をとる

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27} + \dfrac{4}{9} - 1 + 1$
$= \dfrac{13}{27}$

最大値 $9 + \sqrt{2}$
最小値 $\dfrac{13}{27}$ //