



関数  $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$  は  $x = 0$  で極大値 4 をとり、そのグラフは  $x$  軸に接するという。  $p, q, r$  の値を求めよ。 [千葉大]

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q \quad \text{と置く}$$

題意より

$$f'(x) = x(3x + 2p) \quad \text{と置くと} \quad q = 0 \quad \dots \text{①}$$

$$\text{また } f(0) = r = 4 \quad \text{より} \quad r = 4 \quad \dots \text{②}$$

$x = 0$  で極大値をとるから  $f'(x) = x(3x + 2p)$  より

$x = -\frac{2p}{3}$  で極小値をとる。題意より  $x$  軸に接するから

極小値は 0 である。①、②より

$$f(x) = x^3 + px^2 + 4 \quad \text{と置く}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2p}{3}\right) &= \left(-\frac{2p}{3}\right)^3 + p\left(-\frac{2p}{3}\right)^2 + 4 \\ &= \frac{4}{27}p^3 + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{4}{27}p^3 + 4 = 0$$

$$p^3 = -27$$

$$p = -3 \quad \dots \text{③}$$

①、②、③より

$$(p, q, r) = (-3, 0, 4)$$

