関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が次の条件 (イ)(ロ)(ハ) をみたすように実数 a,b,c の値を定めよ。

(イ) 曲線 $y=f(x)$ は $(1,3)$ を通る。

(ロ) $f(x)$ は $x=\alpha$ で極大値, $x=\beta$ で極小値をとり,

$$f(\alpha)-f(\beta)=-2(\alpha-\beta)$$

(ハ) 点 $(1,3)$ での接線と x 軸との交点の x 座標は 2

〔山形大〕

(イ) より $f(1)=1+a+b+c=3$

$a+b+c=2$ …①

(ロ) より

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 極値をとる α,β は解と係数の関係により

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$, $\alpha\beta=\frac{b}{3}$ …②

また条件より

$\alpha^3+\alpha^2a+\alpha b+c-\beta^3-\beta^2a-\beta b-c$

$=\alpha^3-\beta^3+a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+a(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+b(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+b\}$

$=(\alpha-\beta)[\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}+a(\alpha+\beta)+b]=-2(\alpha-\beta)$ より

$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+b=-2$ これと② より

$\frac{4}{9}a^2-\frac{b}{3}-\frac{2a^2}{3}+b=-2$

$-\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{3}b=-2$ …③

(ハ) 接線の式は

$y=(3+2a+b)(x-1)+3$

$=(3+2a+b)x-3-2a-b+3$

$y=(3+2a+b)x-2a-b$ となり

$y=0$ とおくと

$x=\frac{2a+b}{3+2a+b}=2$

これより

$2a+b=-6$ …④

④を③に代入して整理すると

$a^2+6a+9=0$

$(a+3)^2=0$ より

$a=-3$

$a=-3$ を④に代入すると $b=0$

$a=-3$, $b=0$ を①に代入して

$c=5$

以上より

$a=-3$, $b=0$, $c=5$