$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + b$ は $f(1) = 1$ をみたすとする。また，$f(x)$ は $x = \alpha$ および $x = \beta$ $(\alpha < \beta)$ で極値をとり，2 点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ は直線 $y = -8x + 9$ 上にあるという。a, b, α, β を求めよ。 〔東京商船大〕

$f(1) = 1 + a - a^2 + b = 1$ より $b = a^2 - a$ …①

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2$

$= (3x - a)(x + a)$

$f(x)$ は $x = \alpha, \beta$ $(\alpha < \beta)$ で極値をとることから

$x = \frac{a}{3}, -a$ で極値をとる.

$\left(\frac{a}{3}, f\left(\frac{a}{3}\right)\right)$ は $y = -8x + 9$ 上にあることから

$f\left(\frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{a}{3}\right)^2 - a^2\left(\frac{a}{3}\right) + b$

$= -\frac{5}{27}a^3 + b$

$-\frac{5}{27}a^3 + b = -\frac{8}{3}a + 9 \rightarrow b = \frac{5}{27}a^3 - \frac{8}{3}a + 9$ …①

同様に $(-a, f(a))$ も $y = -8x + 9$ 上にあることから.

$a^3 + b = 8a + 9 \rightarrow b = -a^3 - 8a + 9$ …②

①＝② より $\frac{5}{27}a^3 - \frac{8}{3}a + 9 = -a^3 + 8a + 9$

$\frac{32}{27}a^3 = \frac{32}{3}a$

$a^3 = 9a$

$a(a+3)(a-3) = 0$

$a \neq 0$ より $a = \pm 3$.

$a = 3$ のとき ①より $b = 6$

$f'(x) = (3x - 3)(x + 3)$

$= 3(x - 1)(x + 3)$ $\alpha = -3, \beta = 1$.

$a = -3$ のとき ①より $b = 12$

$f'(x) = (3x + 3)(x - 3)$

$= 3(x + 1)(x - 3)$ $\alpha = -1, \beta = 3$

$(a, b, \alpha, \beta) = (3, 6, -3, 1), (-3, 12, -1, 3)$