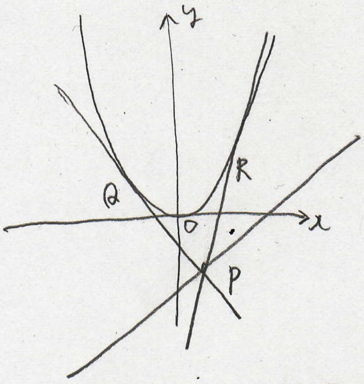
放物線 $C: y = x^2$ と, それと共有点をもたない直線 $\ell: y = ax + b$ を考える。直線 ℓ 上の点 P から放物線 C に相異なる 2 本の接線を引き, その接点をそれぞれ Q, R とする。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) 点 Q, R の座標をそれぞれ (α, α^2), (β, β^2) とおく。点 P の x 座標を α, β で表わせ。

(2) 直線 QR は点 P を ℓ 上どのようにとっても, 定点を通ることを証明せよ。

〔佐賀〕

(1)



$y' = 2x$ より

Q(α, α^2) における接線は

$y = 2\alpha(x-\alpha) + \alpha^2 \rightarrow y = 2\alpha x - \alpha^2$ …①

R(β, β^2) における接線は

$y = 2\beta(x-\beta) + \beta^2 \rightarrow y = 2\beta x - \beta^2$ …②

①,②の交点 P の x 座標は

$2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2$

$2(\alpha-\beta)x = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ 　 $\alpha \neq \beta$ より

$x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

答 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

(2)

直線 QR は $y = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha) + \alpha^2$

$y = (\alpha+\beta)(x-\alpha) + \alpha^2 \rightarrow y = (\alpha+\beta)x - \alpha\beta$ …③

P の点を (t, s) とすると (1) より $t = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 　 $s = 2\alpha \cdot \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^2 = \alpha\beta$

(1) の①に代入

よって $P\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right) \rightarrow P(t, s)$

③は $y = 2tx - s$ …④ となり $P(t, s)$ は $y = ax + b$ 上の点であることから

$s = at + b$ …⑤ 　⑤を④に代入すると

$y = 2tx - at - b$

$= t(2x - a) - b$

t は任意なので これが成り立つためには

$2x - a = 0$ 　 $y = -b$ である これより

$x = \dfrac{a}{2}$ であるから 定点 $\left(\dfrac{a}{2}, -b\right)$ を通る