総合31

xy 平面において，点 $\mathrm{P}(a, b)$(ただし，$a \geqq 0$ とする) から曲線 $y=f(x)=x^3-3x$ にひける接線の数が２本以下とする。そのような点Ｐのとりうる範囲を求め，図示せよ。

〔福島県医大〕

$f(x)$ 上の点を $(t,\ t^3-3t)$ とするとこの点における

接線の式を求めると

$f'(x)=3x^2-3$ より　$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$ つまり

$y=(3t^2-3)x-2t^3$ となる これが $P(a,b)$ を通ることから

$b=(3t^2-3)a-2t^3$

$2t^3-3at^2+3a+b=0$ となる …①

このときの①の３次方程式の実数解が２つ以下なら

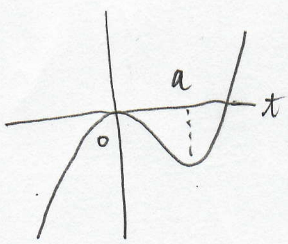
接線も２本以下になる

$g(t)=2t^3-3at^2+3a+b$ とすると

$g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$ $(\because a \geqq 0)$

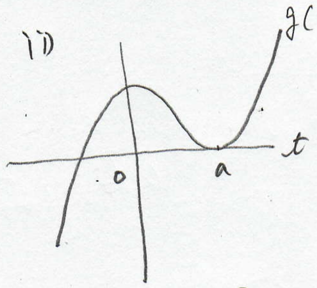
$t=0$ と $t=a$ で極値をとるが，このときグラフの形で調べると i) ii) のどちらかになる

i)



$g(0) \leqq 0$

ii)



$g(a) \geqq 0$

i) $g(0) \leqq 0$ より

$3a+b \leqq 0$

$b \leqq -3a$ …①

ii) $g(a) \geqq 0$ より

$-a^3+3a+b \geqq 0$

$b \geqq a^3-3a$ …②

② は $b=a^3-3a$ とすると

$b'=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$

iii)

又 $a \geqq 0$

i) ii) iii) より右図のようになる

境界線は含む