微分32

3次方程式 $x^3+3x^2-24x-a=0$ が，異なる3つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めなさい。〔立教大〕

〔次頁に発展類題あり〕

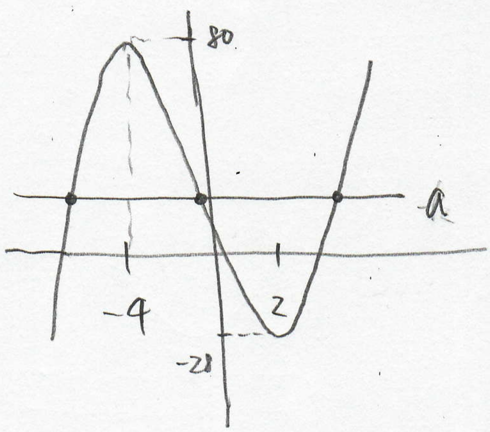
$f(x)=x^3+3x^2-24x-a$

$f(x)=a$ として グラフの交点として 実数解の個数を調べる

$f'(x)=3x^2+6x-24$
$=3(x+4)(x-2)$

$x=2,\ -4$ で極値をとる

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	80	$\searrow$	-28	$\nearrow$



ちなみに

$a<-28$ のとき 1個

$a=-28$ のとき 2個

$-28<a<80$ のとき 3個

$a=80$ のとき 2個

$a>80$ のとき 1個

答 $-28<a<80$

kを実数の定数として，
$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 3$
$g(x) = x^4 + x^2 - (k+1)x + k$
とおく。k の値が変化するとき，曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の個数を調べなさい。
〔聖マリアンヌ医大〕

$g(x) - f(x)$ を考える

$g(x) - f(x) = x^4 + x^2 - (k+1)x + k - 2x^3 - x^2 + 5x - 3$

$= x^4 - 2x^3 - (k-4)x + k - 3$ …①

$x=1$ のとき これは 0 になるので

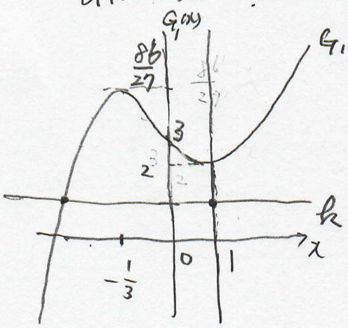
①は $(x-1)(x^3 - x^2 - x - k + 3)$ となり

$(x-1)(\underline{x^3 - x^2 - x - k + 3}) = 0$ で解の個数を調べる

〜〜線部 で $x^3 - x^2 - x - k + 3 = 0$ で k による解の個数を調べるために

$G_1(x) = x^3 - x^2 - x + 3$　$G_2(x) = k$ として 調べる

$G_1'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$　$x=1$，$x=-\frac{1}{3}$ で極値をとる グラフの概形は次のようである



左図より

$$\begin{cases} k \leq 2 \text{ のとき } 2\text{個} \\ 2 < k < \frac{86}{27} \text{ のとき } 4\text{個} \\ k = \frac{86}{27} \text{ のとき } 3\text{個} \\ k > \frac{86}{27} \text{ のとき } 2\text{個} \end{cases}$$