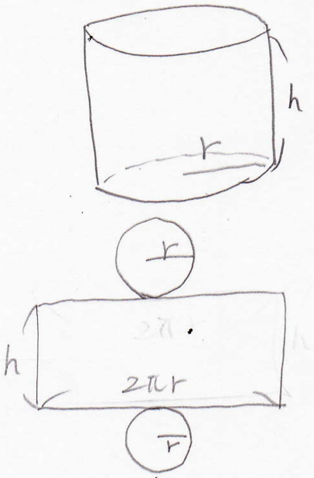
ゼブとまも

円筒の表面積 (上底面, 下底面と側面の面積の総和) が一定であるとき, 体積が最大となる場合の円筒の半径と高さの比を求めよ。　〔岩手大〕



底面の半径r, 高さhとして
表面積Sを求めると

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

$$S=2\pi r(r+h)\ \cdots①$$

体積Vを求めると

$$V=\pi r^2 h$$

①より $h=\dfrac{S}{2\pi r}-r$ であるから V は

$$V=\pi r^2\left(\frac{S}{2\pi r}-r\right)$$

$$=\frac{\pi r^2 S}{2\pi r}-\pi r^3$$

$$\therefore\ V=\frac{S}{2}r-\pi r^3=\left(\pi r\left(\frac{S}{2\pi}-r^2\right)\right)$$

$$V'=\frac{S}{2}-3\pi r^2$$

$$=3\pi\left(\frac{S}{6\pi}-r^2\right)$$

$\therefore$ $r=\pm\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ で極値をとり

$r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ で最大となる

$\because$ $0<r<\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$

このとき h は

$$h=\frac{S}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}-\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

$$=\sqrt{\frac{3S}{2\pi}}-\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

$$=\frac{\sqrt{6\pi S}}{2\pi}-\frac{\sqrt{6\pi S}}{6\pi}$$

$$=\frac{2\sqrt{6\pi S}}{6\pi}$$

$=2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ となるので

$$r:h=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}:2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=1:2$$