ビルブリン 39

$f(x)=(x+1)(x-2)(x-5)$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする。また $g(x)=ax+b$ とし，直線 $y=g(x)$ を l とする。

(1) $f(x)-g(x)$ が極大値と極小値をもつ a の条件を求めよ。

(2) C と l の共有点の個数が b によらず一定である a の範囲を求めよ。

(3) $a=-6$ のとき，b の値によって C と l の共有点の個数はどのように変化するか。

〔山梨大〕

(1) $F(x)=f(x)-g(x)$

$=(x+1)(x-2)(x-5)-ax-b$

$=(x^2-x-2)(x-5)-ax-b$

$=x^3-6x^2+(3-a)x+10-b$

$F'(x)=3x^2-12x+(3-a)$ いの

mが異なる2つの実数解をもてばよいので

$36-3(3-a)>0$

$12-3+a>0$

$\therefore\ a>-9$

(2) $f(x)=g(x)$ より

$x^3-6x^2+(3-a)x+10-b=0$

$x^3-6x^2+(3-a)x+10=b$

このとき $f(x)$ と $g(x)$ の共有点の個数は

$T(x)=x^3-6x^2+(3-a)x+10$ と

$S(x)=b$ の共有点の個数と一致する

b の値によらないので

$T(x)$ は単調増加であればよい

$\therefore\ T'(x)=3x^2-12x+(3-a)$

で

$36-3(3-a)\leqq 0$

$12-3+a\leqq 0$

$\therefore\ a\leqq -9$

(3) $a=-6$ のとき

$f(x)=g(x)$ として方程式をまとめると

$x^3-6x^2+9x+10=b$ となる

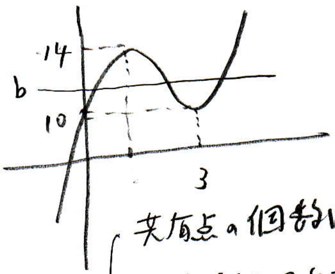
$U(x)=x^3-6x^2+9x+10$

$U(x)=b$ として共有点を調べると

$U'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

x	…	1	…	3	…
$U'(x)$	↗	0	↘	0	↗
$U(x)$	+	14	−	10	+



共有点の個数は

$b<10$ のとき 1個

$b=10$ のとき 2個

$10<b<24$ のとき 3個

$b=14$ のとき 2個

$b>14$ のとき 1個