4

x の関数 $y=x^4-4(a-1)x^3+2(a^2-1)x^2$ が極大値をもつような実数 a の値の範囲を求めなさい。

$f(x)=x^4-4(a-1)x^3+2(a^2-1)x^2$ とする

$f'(x)=4x^3-12(a-1)x^2+4(a^2-1)x$

$f(x)$ が極大値をもつためには

$f'(x)$ が異なる3つの実数解をもつことが必要

ここで

$f'(x)=4x\{x^2-3(a-1)x+a^2-1\}$ …① ∵ $a^2-1\neq0$ …②

（これがないと 4xで因数分解できない）

となり 解の1つは0となる。よって①の{ }内の二次式を次のようにおくとき下の③の方程式が異なる2つの実数解をもてばよい

$$x^2-3(a-1)x+a^2-1=0 \quad \cdots ③$$

$D>0$

$$9(a-1)^2-4(a^2-1)>0$$

$$9a^2-18a+9-4a^2+4>0$$

$$5a^2-18a+13>0$$

$$(a-1)(5a-13)>0$$

$$a<1,\quad a>\frac{13}{5}$$

②より $a^2-1\neq0$ なので $a\neq\pm1$

以上より $a<1\ (a\neq-1),\quad a>\dfrac{13}{5}$