直線 $l : y = x + 1$ と曲線 $C : y = 2x^2 - 4x + 1$ との交点を P, Q とするとき, 次の各問いに答えよ。ただし, P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする。

(1) 直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき, 点 P と直線 m との距離を求めよ。

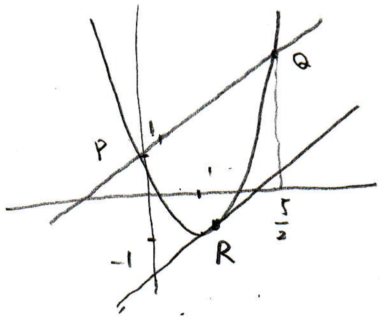
(2) 曲線 C と (1) における直線 m との接点を R とする。このとき, $\triangle$PQR の面積を求めよ。

(3) 点 (x, y) が直線 l と曲線 C で囲まれる領域にあるとき, $x + y$ の最小値を求めよ。ただし, 領域は境界を含むものとする。

〔宮崎大〕

(1) $y = 2(x-1)^2 - 1$　　$2x^2 - 4x + 1 = x + 1$

$2x^2 - 5x = 0$　　$x(2x-5) = 0$



$y' = 4x - 4$　接点を $R(t, 2t^2 - 4t + 1)$ とすると

傾き $4t - 4 = 1$ より　$t = \frac{5}{4}$

$\therefore R\left(\frac{5}{4}, -\frac{7}{8}\right)$ 従って接線 m は

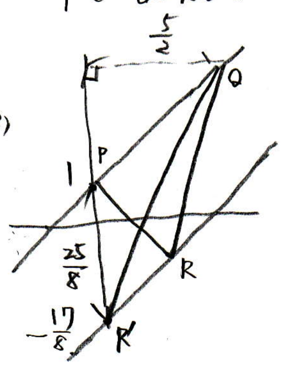
$y = (4t-4)(x-t) + 2t^2 - 4t + 1$

$y = (4t-4)x - 2t^2 + 1$ より

$y = x - \frac{17}{8}$ → $-8x + 8y + 17 = 0$

∴ P との距離は $\frac{|-8\cdot 0 + 8\cdot 1 + 17|}{\sqrt{8^2 + 8^2}} = \frac{25}{8\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{16}$

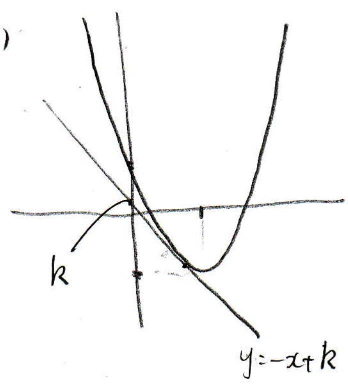
(2)



$\triangle PQR = \triangle PQR'$

$\therefore \triangle PQR = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{8}\cdot\frac{5}{2} = \frac{125}{32}$

(3)



$x + y = k$ とおいて

$y = -x + k$ として切片の最小値を考える

$y' = 4x - 4$ より 接点を $(s, 2s^2 - 4s + 1)$ とおくと

$4s - 4 = -1$

$4s = 3$

$s = \frac{3}{4}$ → よって接点は $\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{8}\right)$ となりこの点を通るとき k は最小となる

$\therefore k = x + y = \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = -\frac{1}{8}$

$\therefore -\frac{1}{8}$