ごうかく!

微分42

3次関数 $f(x)$ は $x=0$ のとき極小値3, $x=-\frac{1}{3}$ のとき極大値 $\frac{83}{27}$ をとる。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点Bにおける接線が点Aを通るように点Bの座標を求めよ。

〔埼玉大〕

(1)

$f'(x)=ax(3x+1)$ とおける.

$f'(x)=3ax^2+ax$ より

$f(x)=\int(3ax^2+ax)dx = ax^3+\frac{1}{2}ax^2+C$

$f(0)=3$ より $C=3$

$f(-\frac{1}{3})=\frac{83}{27}$ で $C=3$ であるから $-\frac{a}{27}+\frac{a}{18}+3=\frac{83}{27}$

$-2a+3a+162=166$

$a=4$

$\therefore$ $f(x)=4x^3+2x^2+3$

(2) $f'(x)=12x^2+4x$ より $A(\frac{1}{2}, 4)$ より

接線の式は $y=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+4$

$y=5(x-\frac{1}{2})+4$ $\therefore$ $y=5x+\frac{3}{2}$

(3) $B(t, f(t))$ とおくと 接線の式は

$y=(12t^2+4t)(x-t)+4t^3+2t^2+3$

$y=(12t^2+4t)x-8t^3-2t^2+3$ これが $A(\frac{1}{2}, 4)$ を通るから

$4=6t^2+2t-8t^3-2t^2+3$

$8t^3-4t^2-2t+1=0$

$(2t+1)(2t-1)^2=0$ $\therefore$ $t=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ Bのx座標 $t\neq\frac{1}{2}$ であるから

$t=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $B(-\frac{1}{2}, 3)$