ⅡB

xy 平面上に, 点 P$(0,-2)$, 放物線 $y=\dfrac{x^2}{a}(a>0)$, 放物線上の点 Q における接線 l があるとき, 次の問いに答えよ。

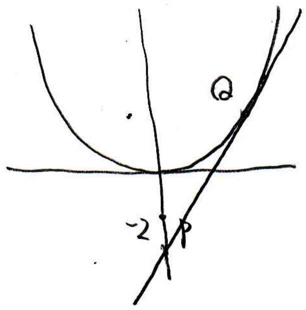
(1) l の方程式を求めよ。

(2) l が点 P を通るとき, 点 Q の座標を求めよ。ただし, 接線の傾きは正とする。

(3) (2) の直線 l と円 $(x-b)^2+y^2=r^2(r>0)$ が点 Q で接するとき, b と r の値を a を用いて表せ。

〔岩手大〕

(1)



点Qを$\left(s,\dfrac{s^2}{a}\right)$とすると

$y'=\dfrac{2x}{a}$ より 求める~~接線~~の式は

$y=\dfrac{2s}{a}(x-s)+\dfrac{s^2}{a}$

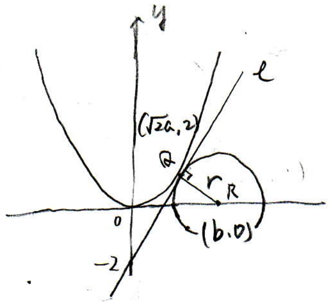
$\therefore\ \underline{y=\dfrac{2s}{a}x-\dfrac{s^2}{a}}$

(2) (1)で求めた式にP$(0,-2)$を代入すると

$-\dfrac{s^2}{a}=-2 \qquad s^2=2a \qquad s=\pm\sqrt{2a}$

$a>0$ より $s>0$ であるから $\qquad s=\sqrt{2a} \qquad \therefore\ \underline{Q\,(\sqrt{2a},\ 2)}$

(3)



円の中心をR$(b,0)$とすると

$r=\sqrt{(\sqrt{2a}-b)^2+4}$ …①

直線RQの傾きは $\dfrac{0-2}{b-\sqrt{2a}}=-\dfrac{2}{b-\sqrt{2a}}$

直線RQとlの傾きの積は-1であるから

$-\dfrac{2}{b-\sqrt{2a}}\cdot\dfrac{2\sqrt{2a}}{a}=-1 \qquad -\dfrac{4\sqrt{2a}}{a}=-b+\sqrt{2a} \qquad \therefore\ \underline{b=\sqrt{2a}+\dfrac{4\sqrt{2a}}{a}}$

これを①に代入して

$r=\sqrt{\left(-\dfrac{4\sqrt{2a}}{a}\right)^2+4} \qquad \therefore\ \underline{r=\sqrt{\dfrac{32}{a}+4}}$