北B 微分45

点 (1,0) を通り傾き k の直線 l が, 放物線 $C : y=\dfrac{x^2}{2}$ と異なる 2 点 P, Q で交わるとする。ただし, 点 P の x 座標は点 Q の x 座標より小さいとする。次の各問いに答えよ。

(1) k の範囲を求めよ。

(2) 放物線 C の点 P での接線 m の傾きを $\tan\alpha$ とし, 放物線 C の点 Q での接線 n の傾きを $\tan\beta$ とする。ただし, α と β はともに $0°$ より大きく $180°$ より小さい角である。$\tan\alpha+\tan\beta$ と $\tan\alpha\tan\beta$ をそれぞれ k で表せ。

(3) $k<0$ とする。(2) で定めた 2 直線 m と n の交点を R とする。$\angle\mathrm{PRQ}=135°$ であるとき, k の値を求めよ。

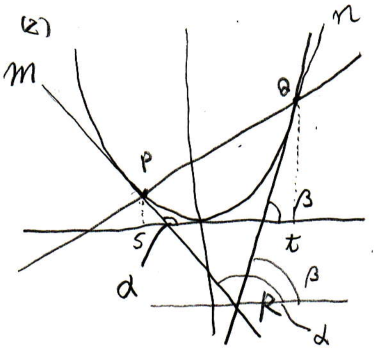
〔茨木大〕

(1) l は $y=k(x-1)$　$\dfrac{x^2}{2}=k(x-1)$ として

$x^2-2kx+2k=0$ の判別式 $D>0$ を求める

$k^2-2k>0$　$k(k-2)>0$　∴ $k>2,\ k<0$

(2)



P, Q の x 座標を s, t とすると

$y'=x$ より 接線 m, n の傾きはそれぞれ s, t

となる このとき $s=\tan\alpha$, $t=\tan\beta$ である.

また s, t は (1) における二次方程式

$x^2-2kx+2k=0$ の2つの解であるから解と係数の関係より

$\tan\alpha+\tan\beta=s+t=2k$

$\tan\alpha\tan\beta=st=2k$　∴ $\tan\alpha+\tan\beta=2k$, $\tan\alpha\cdot\tan\beta=2k$ (答)

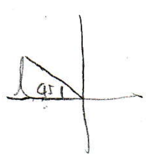
(3) $\tan 135°=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$

$=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(2) より

$\tan\alpha-\tan\beta=\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta}=\sqrt{4k^2-8k}$

∴ $\dfrac{\sqrt{4k^2-8k}}{1+2k}=-1$



$\sqrt{4k^2-8k}=-(1+2k)$

$4k^2-8k=1+4k+4k^2$

$-12k=1$

$k=-\dfrac{1}{12}$