ⅡBビブン46

放物線 $C : y = x^2$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ での C の接線 l を求めよ。

(2) 点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ で l と接する円のうち, 中心が y 軸上にあるものを求めよ。

(3) (2) で求めた円と C とで囲まれた弓形の図形の面積を求めよ。

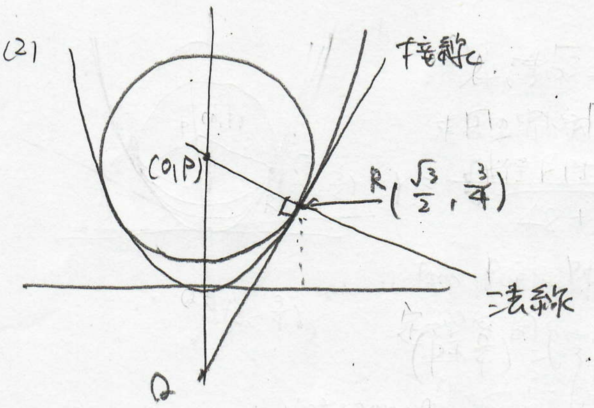
〔名古屋市大〕

(1)

$y' = 2x$　　∴ $y = \sqrt{3}\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{3}{4}$

求める接線 l は　$y = \sqrt{3}x - \dfrac{3}{4}$ //

(2)



法線との y 軸との交点で円の中心を求めてもよいが、ここでは三平方でやってみる

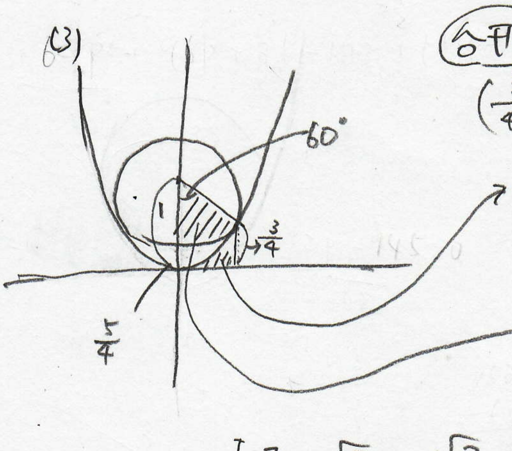
中心を $P(0, p)$　$Q\left(0, -\frac{3}{4}\right)$　$R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ とすると

$$\frac{3}{4} + \left(p - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(p + \frac{3}{4}\right)^2$$

$$3p = \frac{15}{4} \qquad p = \frac{5}{4}$$

よって求める円の式は　$x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$

(3)



台形

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$1 \times 1 \times \pi \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\pi$$

よって $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{6}\pi = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{6}\pi$

従って それを2倍して

$\dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{3}\pi$ //