とビデン47

$f(x) = x^3 - x$ とし, 関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ。

(2) $t \neq t'$ のとき, 点 $(t, f(t))$ における C の接線と点 $(t', f(t'))$ における C の接線は異なることを示せ。

(3) C の接線で $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ を通るものの方程式をすべて求めよ。

(4) 点 (u, v) を通る C の接線が 3 本存在するための u, v の満たすべき条件を求めよ。また, その条件を満たす点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

〔鹿児島大〕

(1) $f'(x) = 3x^2 - 1$ $\quad y = (3t^2-1)(x-t) + t^3 - t$

$\therefore\ y = (3t^2-1)x - 2t^3$

(2) 点 $(t', t'^3 - t')$ における接線の傾きは $3t'^2-1$ 切片は $-2t'^3$ であり

これが等しいとすると $3t^2-1 = 3t'^2-1 \rightarrow (t+t')(t'-t)=0$

$2t^3 = 2t'^3 \rightarrow (t-t')(t^2+tt'+t'^2)=0$

より $t=t'$ となるので $t \neq t'$ に合わない

よって接線は異なる

(3) (1)の式に $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ を代入すると

$-\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(3t^2-1) - 2t^3 \rightarrow 6t^3 - 6t^2 = 0 \quad 6t^2(t-1)=0$

(答) $\begin{cases} t=0 \text{ のとき} & y=-x \\ t=1 \text{ のとき} & y=2x-2 \end{cases}$

(4) $v = (3t^2-1)u - 2t^3$

$2t^3 - 3ut^2 + u + v = 0$ として

$f(t) = 2t^3 - 3ut^2 + u + v$ を考える

$f'(t) = 6t^2 - 6ut$

$= 6t(t-u)$ となり

$t=0, u$ で極値をとる 3本の接線が引けるためには $f(t)=0$ の方程式が異なる3つの実数解をもつことであり,

極値 $f(0), f(u)$ の積が負であればよい

$f(0) = u+v$

$f(u) = -u^3+u+v$ であり

よって $(u+v)(-u^3+u+v) < 0$

$u+v>0$ かつ $-u^3+u+v<0$

または

$u+v<0$ かつ $-u^3+u+v>0$

次へつづく

ビッグバン47

$v > -u$　　$v < u^3 - u$　または

$v < -u$　　$v > u^3 - u$　が (u, v) の領域

$f(u) = u^3 - u = u(u-1)(u+1)$

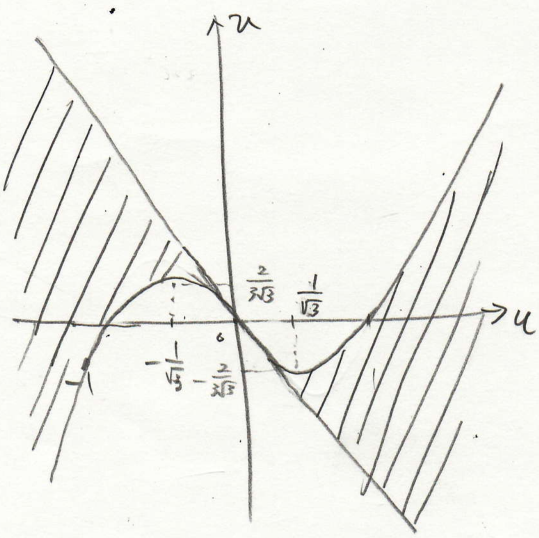
$f'(u) = 3u^2 - 1$

$= (\sqrt{3}u + 1)(\sqrt{3}u - 1)$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$　　$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

x	…	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗

よって



典型問題