ⅡB
微分 48

放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,a^2)$ における接線を L_a とし，点 $\mathrm{B}(b,b^2)$ における接線を L_b とする。ただし，$a>0, b<0$ とする。次の問いに答えよ。

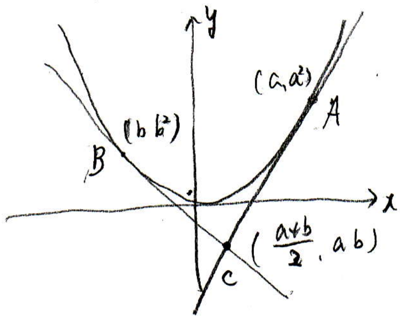
(1) L_a と L_b との交点 C の座標を求めよ。

(2) L_a と L_b が直交するとき，b を a を用いて表せ。

(3) L_a と L_b が直交し，さらに AC : BC=$\sqrt{3}$: 1 となるとき，a と b の値を求めよ。

〔同志社大〕

(1)



$L_a \quad y=2a(x-a)+a^2$

$L_b \quad y=2b(x-b)+b^2$

$a \neq b$ として　$x=\dfrac{a+b}{2}$

$y=2a\left(\dfrac{a+b}{2}-a\right)+a^2=ab$

$\therefore \quad C\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

(2)

$2a\times 2b=-1$

$4ab=-1$ より　$b=-\dfrac{1}{4a}$

(3) $L_a \perp L_b$ とき　$C\left(\dfrac{a-\frac{1}{4a}}{2},\ a\cdot -\dfrac{1}{4a}\right)$ より　$C\left(\dfrac{4a^2-1}{8a},\ -\dfrac{1}{4}\right)$　$B\left(-\dfrac{1}{4a},\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$

$AC=\sqrt{\left(\dfrac{4a^2-1}{8a}-a\right)^2+\left(-\dfrac{1}{4}-a^2\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{-4a^2-1}{8a}\right)^2+\left(\dfrac{-1-4a^2}{4}\right)^2}$　　$-4a^2-1<0$ より

$=(4a^2+1)\sqrt{\dfrac{1}{64a^2}+\dfrac{1}{16}}$

$BC=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{4a}-\dfrac{4a^2-1}{8a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{-4a^2-1}{8a}\right)^2+\left(\dfrac{4a^2+1}{16a^2}\right)^2}$　　$-4a^2-1<0$ より

$=(4a^2+1)\sqrt{\dfrac{1}{64a^2}+\dfrac{1}{256a^4}}$

$AC:BC=\sqrt{3}:1$ より

$\sqrt{\dfrac{1}{64a^2}+\dfrac{1}{16}}:\sqrt{\dfrac{1}{64a^2}+\dfrac{1}{256a^4}}=\sqrt{3}:1$

$\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1}{64a^2}+\dfrac{1}{256a^4}}=\sqrt{\dfrac{1}{64a^2}+\dfrac{1}{16}}$

両辺2乗して $256a^4$ をかけると

$3(4a^2+1)=4a^2+16a^4$

$16a^4-8a^2-3=0$

$(4a^2+1)(4a^2-3)=0$

$a>0$ より

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$b=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$