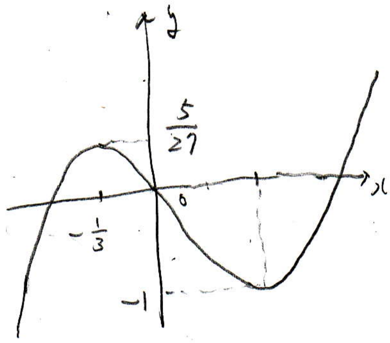
IIB 微分 49

2つの関数 $f(x)=x^2+a,\ g(x)=x^3-x$ がある。曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ が2つの共有点をもつときの定数 a の値を $a_1, a_2(a_1<a_2)$ とすると，$a_1=\boxed{}$，$a_2=\boxed{}$ である。2つの曲線の共有点の個数は，$a<a_1$ のとき $\boxed{}$ 個，$a_1<a<a_2$ のとき $\boxed{}$ 個，$a_2<a$ のとき $\boxed{}$ 個である。

$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通の接線は $\boxed{}$ 本あり，これらの接線の傾きの最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。〔北里大〕

$x^2+a=x^3-x$ とし，$x^3-x^2-x=a$ から $F(x)=x^3-x^2-x$ と $G(x)=a$ の交点を考える。

$F'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$ となりグラフの概形をかくと



$x=-\frac{1}{3}, 1$ で極値をとり
その値は
$F(-\frac{1}{3})=\frac{5}{27}$（極大値）
$F(1)=-1$（極小値）
このとき $G(x)=a$ との共有点は2つなので
$a_1=-1,\quad a_2=\frac{5}{27}$

$a<a_1$ のとき 1個，$a_1<a<a_2$ のとき 3個，$a_2<a$ のとき 1個

$f(x)=x^2+\frac{1}{4},\ g(x)=x^3-x$

$f'(x)=2x\quad g'(x)=3x^2-1$

接点を $f(x)$ のものは $(t, t^2+\frac{1}{4})$ $g(x)$ のものは (s, s^3-s) とするとき

それぞれの接線は

$y=2t(x-t)+t^2+\frac{1}{4} \rightarrow y=2tx-t^2+\frac{1}{4}$ …①

$y=(3s^2-1)(x-s)+s^3-s \rightarrow y=(3s^2-1)x-2s^3$ …②

①②が同じであることから $2t=3s^2-1,\ -t^2+\frac{1}{4}=-2s^3$ より $t=\frac{3s^2-1}{2}$ として

s の方程式をつくると $-\left(\frac{3s^2-1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=-2s^3$ より 整理して $9s^4-8s^3-6s^2=0$

$s^2(9s^2-8s-6)=0$ これから $s=0, \frac{4\pm\sqrt{70}}{9}$ となるので 3本の接線がある。このとき

$3s^2-1=\frac{59\pm8\sqrt{70}}{27}, -1$ であるから 最大値は $\frac{59+8\sqrt{70}}{27}$ 最小値は -1