2 次曲線 $y=x^2$ $(x>0)$ 上の点を $\mathrm{P}(t,t^2)(t>0)$ とし，原点 O と点 P を結ぶ直線を l，点 P におけるこの曲線の接線を m とする。また，l と m のなす角を $\theta(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とし，$k=\tan\theta$ とおく。次の問に答えよ。

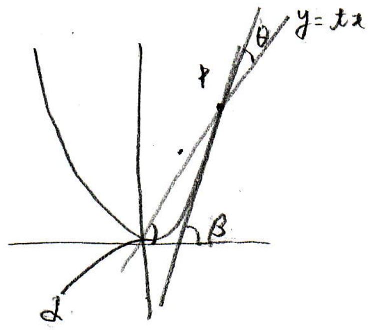
(1) k を t で表せ。

(2) (1) で求めた関係式を t に関する 2 次方程式としてみて，t を $t>0$ の範囲で動かすとき $k=\tan\theta$ の値の範囲を求めよ。

(3) 角度 θ が最大となるときの点 P の座標を求めよ。

〔中央大〕

(1)



$y'=2x$ より 接線の傾きは $2t$

$y=2t(x-t)+t^2$ → mの式は $y=2tx-t^2$

ここで $y=tx$ と x軸のなす角を α，直線 m と x軸のなす角を β とすると

$\theta=\beta-\alpha$ であるから 加法定理より

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad\cdots①$$

ここで $\tan\alpha=t$　$\tan\beta=2t$ であるから ① は次のようになる

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{t}{1+2t^2}=k \qquad \therefore\ k=\frac{t}{1+2t^2}$$

(2) $2kt^2-t+k=0$　この左辺を $f(t)$ とおいて $f(t)=0$ となる t が少なくとも1つは存在するように k の範囲を決める　$t>0$ であるから (1)より $k>0$　従って 軸>0　判別式 $D\geqq0$ であればよい

$f(t)=2k\left(t-\frac{1}{4k}\right)^2-\frac{1}{8k}+k=0$　　$\frac{1}{4k}>0$　判別式より $1-8k^2\geqq0$　$-\frac{\sqrt2}{4}\leqq k\leqq\frac{\sqrt2}{4}$

$k>0$ であることから

$$0<k\leqq\frac{\sqrt2}{4}$$

(3)

θ が最大となるとき $k=\tan\theta$ も最大であるから $k=\frac{\sqrt2}{4}$ として $2kt^2-t+k=0$ に代入

$\frac{\sqrt2}{2}t^2-t+\frac{\sqrt2}{4}=0$

$2\sqrt2t^2-4t+\sqrt2=0$ → $(2t-\sqrt2)(\sqrt2t-1)=0$　$t=\frac{\sqrt2}{2},\ \frac{1}{\sqrt2}$ → 2つは同値

∴ $t=\frac{1}{\sqrt2}$

従って $\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt2},\ \frac12\right)$