ⅡB 微分53

aを定数とし，曲線$y=f(x)=x(x^2-a)$上の点Pにおける接線をlとする。この曲線と接線lとのP以外の共有点をQとし，点Qにおける接線をmとする。lとmが直交するような点Pが取れるためのaの値の範囲を求める。次の各問に答えよ。

(1) 点Pのx座標をtとして，点Pにおける接線lの方程式を求めよ。

(2) 2本の接線l, mが直交するとき，tが満たすべき関係式を求めよ。

(3) lとmが直交するような点Pがとれるためのaの値の範囲を求めよ。

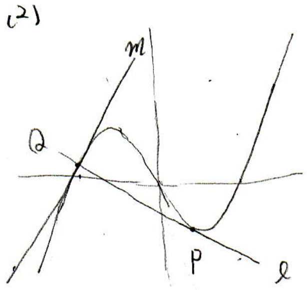
〔日本歯科大〕

(1) $P(t, t^3-at)$　$f'(x)=3x^2-a$ より接線lの式は

$$y=(3t^2-a)(x-t)+t^3-at$$

$y=(3t^2-a)x-2t^3$

(2)



lと$f(x)$の交点を求める

$x^3-ax=(3t^2-a)x-2t^3$

$x^3-3t^2x+2t^3=0$

$(x-t)^2(x+2t)=0$ ← $x=t$で重解をもつ

∴ Qの座標は $(-2t, -2t(4t^2-a))$

従ってmの傾きは $12t^2-a$ である 直交するより $(12t^2-a)(3t^2-a)=-1$

(3) (2)より

$36t^4-12at^2-3at^2+a^2+1=0$

$36t^4-15at^2+a^2+1=0$

$t^2=p$として $g(p)=36p^2-15ap+a^2+1$ を考える. $p>0$より

pが正の実数解をもつようにすればよいので $g(0)=a^2+1>0$ より

軸≥ 0 判別式$\geqq 0$ とすればよい

$g(p)=36\left(p-\frac{5}{24}a\right)^2-\frac{9}{16}a^2+1$　　$\frac{5}{24}a\geqq 0$ より $a\geqq 0$ … i)

$225a^2-4\cdot 36(a^2+1)\geqq 0$

$25a^2-16(a^2+1)\geqq 0$

$9a^2\geqq 16$

$a^2\geqq \frac{16}{9}$

$a\leqq -\frac{4}{3}$　$a\geqq \frac{4}{3}$ … ii)

i), ii) より　$a\geqq \frac{4}{3}$