数B 微分 54

3 次方程式 $x^3-9x-a=0$ (a は定数) について, 次の問に答えよ。

(1) この方程式が 3 つの異なる実数解をもつための a の条件を求めよ。

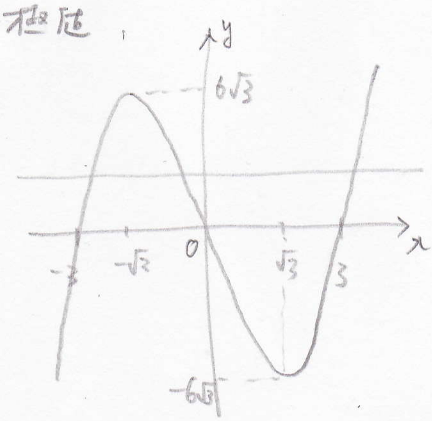
(2) (1) の条件を満たす a のうち, この方程式が少なくとも 1 つの整数解をもつようなものを決定せよ。

〔武蔵工大〕

(1) $f(x)=x^3-9x$ と $g(x)=a$　　$f(x)=x(x+3)(x-3)$

$f'(x)=3x^2-9=3(x^2-3)$　　$x=\pm\sqrt{3}$ で極値

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$



これと $g(x)=a$ の交点の個数が
実数解の個数なので
交点が3つになる a の範囲は

$-6\sqrt{3}<a<6\sqrt{3}$

(2) 整数解は　±3, ±2, ±1, 0 であるから

$h(x)=x^3-9x-a$ とおくと

$h(\pm3)=0$ より　$a=0$

$h(\pm2)=0$ より　$a=\pm10$

$h(\pm1)=0$ より　$a=\pm8$

$h(0)=0$ より　$a=0$

ここで $-6\sqrt{3}<a<6\sqrt{3}$ より これらは 条件を満たす

$\therefore$　$a=0,\ \pm8,\ \pm10$