$y=x^2$ 上の点Pにおける接線が $y=-x^2$ と相異なる2点A, Bで交わっている。このとき, $y=-x^2$ のAにおける接線とBにおける接線の交点をQとする。Pが $y=x^2$ 上を動くとき, Qはどのような曲線上を動くか。〔愛知教育大〕

点 $P(p, p^2)$ $A(a, -a^2)$, $B(b, -b^2)$ とする

Pにおける接線は

$y' = 2x$ より

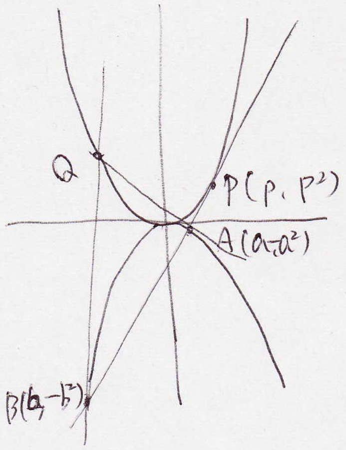
$y - p^2 = 2p(x-p)$

$y = 2px - p^2$

点A, Bは

$-x^2 = 2px - p^2$

$x^2 + 2p - p^2 = 0$ で求められる2解である…①



また同様に点A, Bにおける接線の式は

$y = -2ax + a^2$, $y = -2bx + b^2$ となり交点Qを求めると

$-2ax + a^2 = -2bx + b^2$

$2(a-b)x = a^2 - b^2$

$x = \dfrac{(a+b)(a-b)}{2(a-b)}$

$a \neq 0$ より $x = \dfrac{a+b}{2}$

$y = -2a \cdot \dfrac{a+b}{2} + a^2$

$= -ab$

よって $Q\left(\dfrac{a+b}{2}, -ab\right)$ となる

ここで $\dfrac{a+b}{2} = X$ $-ab = Y$ とすると…②

a, bは①の解であることから

解と係数の関係より

$a + b = -2p$ $ab = -p^2$ …③

となる

②, ③より

$X = -p$

$Y = p^2$ であるから

$Y = X^2$ となり

Qは $y = x^2$ 上を動く

ただし $x = 0$ は除く