ⅡB総合63

実数 a を $0 < a < 2$ とし,

曲線 $C: y = 1 - x^2\ (-1 \leqq x \leqq 1)$, 直線 $l: y = ax + a$

とする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の接線で, 傾きが a となる直線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線上の点と直線 l との距離を求めよ。

(3) 点 $(1, 0)$ と直線 l との距離が (2) で求めた距離と等しくなるように a の値を求めよ。

〔弘前大〕

(1) $y' = -2x$　　$-2x = a$ より $x = -\frac{a}{2}$ となり接点は

$\left(-\frac{a}{2}, 1 - \frac{a^2}{4}\right)$ 従って求める接線の式は

$y = a\left(x + \frac{a}{2}\right) + 1 - \frac{a^2}{4}$

$\underline{y = ax + 1 + \frac{a^2}{4}}$ //

(2) l 上の点 $P(1, 2a)$ との距離を求めればよい

(1) で求めた式より

$4ax - 4y + 4 + a^2 = 0$, これと点 P の距離は

$\frac{|4a - 8a + 4 + a^2|}{\sqrt{16a^2 + 16}} = \frac{(a-2)^2}{4\sqrt{a^2+1}}$　　$\underline{\frac{(a-2)^2}{4\sqrt{a^2+1}}}$ //

(3) 点 $(1, 0)$ と l との距離は $ax - y + a = 0$ より

$\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}$ となり (2) の答と等しいことから

$\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(a-2)^2}{4\sqrt{a^2+1}}$

$8a = (a-2)^2$

$a^2 - 4a + 4 = 8a$

$a^2 - 12a + 4 = 0$

$(a-6)^2 - 32 = 0$

$a - 6 = \pm 4\sqrt{2}$

$a = 6 \pm 4\sqrt{2}$

$0 < a < 2$ より

$\underline{a = 6 - 4\sqrt{2}}$ //