

$xy$  平面上の放物線  $C: y = x^2$  と  $C_a: y = a(x-2)^2 - 1$  を考える。ただし、 $a$  は定数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $C$  と  $C_a$  が共有点をもつような  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $C$  と  $C_a$  が共通の接線をただ1つだけもつような  $a$  の値を求めよ。また、そのときの共通な接線の方程式を求めよ。

[秋田大]

(1)  $C = C_a$  とおいて実数解の有無を調べる

$$x^2 = a(x-2)^2 - 1$$

$$x^2 = ax^2 - 4ax + 4a - 1$$

$$(a-1)x^2 - 4ax + 4a - 1 = 0 \quad \text{∵ かつ } a=1 \text{ のときは}$$

$$-4a + 3 = 0 \quad \text{∴ } x = \frac{3}{4} \text{ で実数解をもつので適する ... ①}$$

$a \neq 1$  とし 判別式  $\frac{b^2}{4} \geq 0$  とすると

$$4a^2 - (a-1)(4a-1) \geq 0$$

$$4a^2 - (4a^2 - 5a + 1) \geq 0$$

$$5a \geq 1$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{5} \quad \text{∵ ① も満たす} \quad \underline{A \quad a \geq \frac{1}{5}}$$

(2)  $y' = 2x$  で  $C$  上の接点を  $(t, t^2)$  とすると接線方程式は

$$y = 2t(x-t) + t^2 \rightarrow y = 2tx - t^2 \quad \text{∵ かつ}$$

共通接線の場合  $2tx - t^2 = a(x-2)^2 - 1$  として二次方程式が

$$\text{重解をもつ。} \quad ax^2 - 4ax + 4a - 1 = 2tx - t^2$$

$$ax^2 - 2(t+2a)x + t^2 + 4a - 1 = 0$$

判別式  $\frac{b^2}{4} = 0$  とすると

$$(t+2a)^2 - a(t^2 + 4a - 1) = 0$$

$$t^2 + 4at + 4a^2 - at^2 - 4a^2 + a = 0$$

$$(1-a)t^2 + 4at + a = 0 \quad \text{... ②}$$

(i)  $a=1$  のとき  $4t+1=0 \quad t = -\frac{1}{4}$  求める接線  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$

(ii)  $a \neq 1$  のときの判別式  $\frac{b^2}{4} = 0$  とし

$$4a^2 - a(1-a) = 0$$

$$5a^2 - a = 0$$

$$a(5a-1) = 0$$

∵  $a \neq 0$  のとき

$$a = \frac{1}{5} \quad \text{∵ ② のときは } \frac{4}{5}t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{1}{5}(2t+1)^2 = 0 \quad \text{∴ } t = -\frac{1}{2}$$

→ ∵ ② の求める接線は  $y = -x - \frac{1}{4}$