ⅡB 微分 66

放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t, t^2)(t > 0)$ における接線を m とし, 点 P を通り y 軸に平行な直線を l とする。さらに, m に関して l と対称な直線を n とする。次の各問いに答えよ。

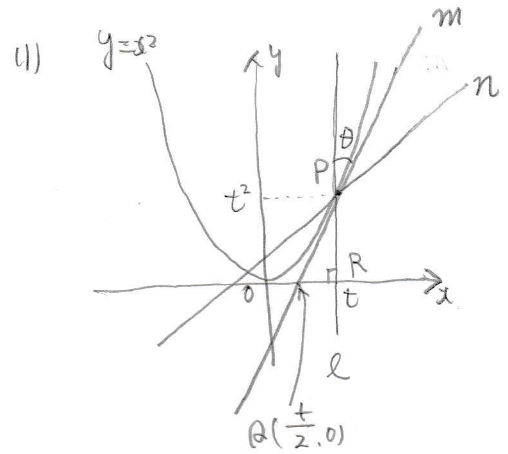
(1) 直線 l と m のなす角を $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき, $\tan\theta$ を t の式で表せ。

(2) 直線 n の傾きが $t - \dfrac{1}{4t}$ であることを示せ。

(3) 直線 n と y 軸との交点の座標を求めよ。

〔山形大〕

(1)



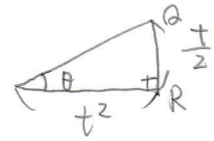
$y'=2x$ より m の式は

$y=2t(x-t)+t^2$

$y=2tx-t^2$

したがって直線 m と x 軸との交点の座標Qは $\left(\frac{t}{2}, 0\right)$，直線 l と x 軸との交点 R は $(t, 0)$

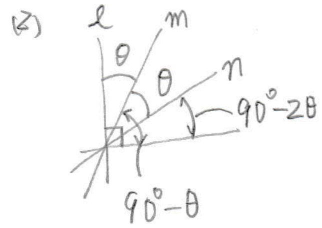
ここで△PQRは以下のようであるから



$\tan\theta = \dfrac{\frac{t}{2}}{t^2} = \dfrac{1}{2t}$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{2t}$

(2)



求める傾きは左図より $\tan(90^\circ-2\theta)$ である.

$\tan(90^\circ-2\theta) = \dfrac{1}{\tan 2\theta} = \dfrac{1}{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}} = \dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2t}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{2t}} = t\left(1-\dfrac{1}{4t^2}\right) = t-\dfrac{1}{4t}$

よって示された.

(3)

直線 n は傾き $t-\dfrac{1}{4t}$ で点P(t, t^2)を通るので

$y=\left(t-\dfrac{1}{4t}\right)(x-t)+t^2 \rightarrow y=\left(t-\dfrac{1}{4t}\right)x+\dfrac{1}{4}$ となるから

$\therefore \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$