ⅡB微分 68

曲線 $y=x^3-2x$ 上の点 $\mathrm{P}(a, a^3-2a)$, $\mathrm{Q}(b, b^3-2b)$ $(a>b)$ について, 点 P, Q における接線の傾きが等しいとき

(1) 2 点 P, Q を通る直線の方程式を b を用いず, a を用いて表せ。

(2) (1) で求めた直線と点 P における接線が直交するとき, 点 P, Q の座標を求めよ。

〔群馬大〕

(1) $y=f(x)$ として

$f'(x)=3x^2-2$ $\quad f'(a)=f'(b)$ より

$3a^2-2=3b^2-2$ より, $a^2=b^2$ $\therefore a=\pm b$ $\quad a>b$ より $\quad a=-b$ となる

従って Q は a を用いて $\mathrm{Q}(-a, -a^3+2a)$ となり PQ を通る直線の式は

$y=\dfrac{a^3-2a-(-a^3+2a)}{a-(-a)}(x-a)+a^3-2a$ より $a\neq0$ として $y=(a^2-2)(x-a)+a^3-2a$

$\therefore$ $\underline{y=(a^2-2)x}$ $\quad \because a\neq0, b\neq0$

(2) P における接線の式は

$y=(3a^2-2)(x-a)+a^3-2a$ より $\quad y=(3a^2-2)x-2a^3 \cdots ①$

(1) で求めた式と ① が直交することより

$(a^2-2)(3a^2-2)=-1$

$3a^4-8a^2+5=0$

$(a^2-1)(3a^2-5)=0$ $\quad \therefore a=\pm1, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \to 3 \\ 3 & -5 & \to 5 \end{array}$

$\because a>b$ より $a=1, \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

したがって

$\mathrm{P}(1, -1)$, $\mathrm{Q}(-1, 1)$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}, -\dfrac{\sqrt{15}}{9}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3}, \dfrac{\sqrt{15}}{9}\right)$