2132総合69

ok

t>0.

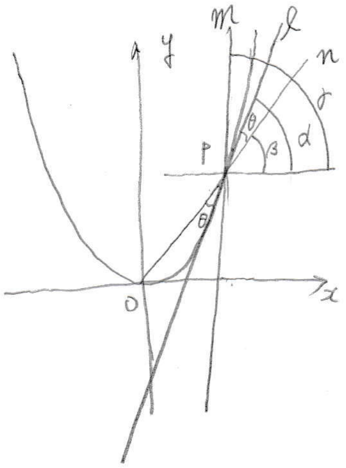
xy 平面上の放物線 $C : y = x^2$ を考える。原点を O とし, 放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(t, t^2)$ $(t > 0)$ における接線を l とする。直線 OP と l のなす角を θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

(1) $\tan\theta$ を t を用いて表せ。

(2) 点 P を通り l となす角が θ であるような 2 本の直線のうち, 直線 OP ではない直線 m の方程式を求めよ。

(3) (2) で求めた直線 m が点 $\left(\dfrac{6}{7}, 0\right)$ を通るとする。このとき, 点 P の座標を求めよ。

〔埼玉大〕



左図より $\theta = \alpha - \beta$ とする

l の傾きは $y' = 2x$ より $2t$

$\therefore \tan\alpha = 2t$

また 直線 n の傾きは $\dfrac{t^2}{t} = t$ より

$\tan\beta = t$

$\therefore \tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$ より

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{2t - t}{1 + 2t\cdot t} \quad \therefore \quad \tan\theta = \frac{t}{1+2t^2}$$

(2) m の傾きは $\tan(\alpha+\theta)$ より

$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\theta} = \frac{2t + \dfrac{t}{1+2t^2}}{1 - 2t\cdot\dfrac{t}{1+2t^2}} = \frac{4t^3+3t}{1} = 4t^3+3t$$

$\therefore$ 求める式は

$$y = (4t^3+3t)(x-t) + t^2$$

ゆえに $y = (4t^3+3t)x - 4t^4 - 2t^2$

(3) 点 $\left(\dfrac{6}{7}, 0\right)$ を通る条件は

$\dfrac{6}{7}(4t^3+3t) - 4t^4 - 2t^2 = 0$

$6(4t^3+3t) - 28t^4 - 14t^2 = 0$

$3(4t^3+3t) - 14t^4 - 7t^2 = 0$

$12t^3 + 9t - 14t^4 - 7t^2 = 0$

$14t^4 - 12t^3 + 7t^2 - 9t = 0$

$t(14t^3 - 12t^2 + 7t - 9) = 0$

$t(t-1)(14t^2+2t+9) = 0$

$14t^2+2t+9=0$ として 判別式 D を用いると $D<0$ となり 実数解をもたない

$\therefore$ $t = 0, 1$ となるが $t > 0$ より $t = 1$.

ゆえに P の座標は

P(1, 1)