曲線 $y = x^3 + 3x^2 - 4$ に相異なる3本の接線が引けるような点の存在する範囲を図示せよ。

〔信州大〕

$y' = 3x^2 + 6x$　xy 平面上の点を $P(x_1, y_1)$ とし

接点を $(t,\ t^3 + 3t^2 - 4)$ とすると

接線の式は

$y = (3t^2 + 6t)(x - t) + t^3 + 3t^2 - 4$

$y = (3t^2 + 6t)x - 2t^3 - 3t^2 - 4$ となる

これが $P(x_1, y_1)$ を通ることより

$y_1 = (3t^2 + 6t)x_1 - 2t^3 - 3t^2 - 4$

t について降べきの順にならべると

$2t^3 + (3 - 3x_1)t^2 - 6x_1 t + y_1 + 4 = 0$ …①

①が3つの異なる実数解をもてばよい

つまり 極大値 > 0 極小値 < 0 より

(極大値)・(極小値) < 0 となる範囲をもとめる。

$f(t) = 2t^3 + (3 - 3x_1)t^2 - 6x_1 t + y_1 + 4$ とし

$f'(t) = 6t^2 + 6(1 - x_1)t - 6x_1$

$= 6(t + 1)(t - x_1)$

ここで $x_1 \neq -1$ である

$f'(t) = 0$ より $t = -1,\ x_1$ で極値をとる。

よって

$f(-1) \cdot f(x_1) < 0$ が求める条件。

$(y_1 + 3x_1 + 5)\{y_1 - (x_1^3 + 3x_1^2 - 4)\} < 0$

$\therefore$ $y_1 + 3x_1 + 5 > 0$ で $y_1 - (x^3 + 3x^2 - 4) < 0$

または

$y_1 + 3x_1 + 5 < 0$ で $y_1 - (x^3 + 3x^2 - 4) > 0$

のときである

つまり

$y_1 > -3x_1 - 5$

$y_1 < x_1^3 + 3x_1^2 - 4$

または

$y_1 < -3x_1 - 5$

$y_1 > x_1^3 + 3x_1^2 - 4$

次ページ

ここで

$y = x^3 + 3x^2 - 4$

$y' = 3x^2 + 6x$

$= 3x(x+2)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-4	↗

また $y = x^3 + 3x^2 - 4$

$y = -3x - 5$ から

$x^3 + 3x^2 - 4 = -3x - 5$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$(x+1)^3 = 0$

よって求める範囲は

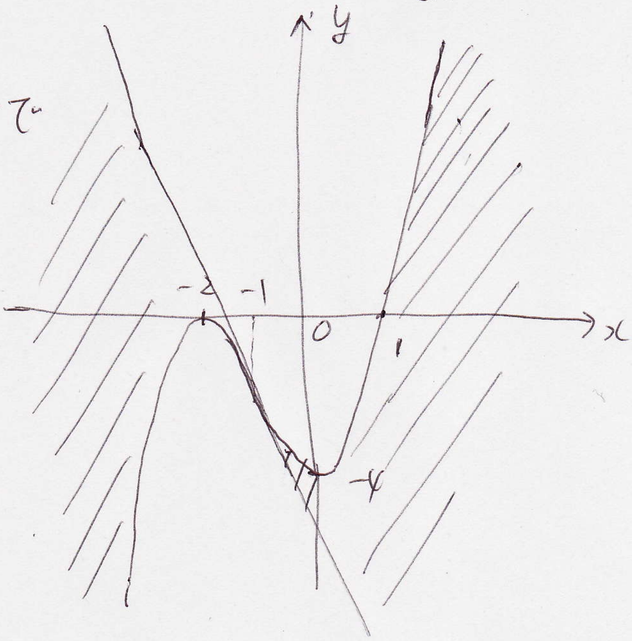
$y > -3x - 5$

$y < x^3 + 3x^2 - 4$

または

$y < -3x - 5$

$y > x^3 + 3x^2 - 4$ で



斜線部で境界線は含まない.