2B 微分70

3次関数 $f(x)$ および2次関数 $g(x)$ を $f(x)=x^3$, $g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) b,c を a を用いて表せ。

(2) $f(x)-g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。

〔千葉大〕

(1)

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2ax+b$

題意より $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)$ であるから

$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{8}$ より $2a+4b+8c=1$ …①

$\frac{3}{4}=a+b$ …②

②より $b=\frac{3}{4}-a$ …③ ③を①に代入して

$2a+4\left(\frac{3}{4}-a\right)+8c=1 \rightarrow 2a+3-4a+8c=1$ より $c=\frac{a-1}{4}$

以上より $\underline{b=-a+\frac{3}{4},\ c=\frac{a-1}{4}}$

(2) (1)より

$g(x)=ax^2+\left(-a+\frac{3}{4}\right)x+\frac{a-1}{4}$ とし

$h(x)=f(x)-g(x)$ として．

$h(x)=x^3-ax^2+\left(a-\frac{3}{4}\right)x-\frac{a-1}{4}$

$h'(x)=3x^2-2ax+a-\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{4}(6x-4a+3)(2x-1)$

$x=\frac{4a-3}{6}$, $\frac{1}{2}$ で極値をとる

i) $\frac{4a-3}{6}\leqq 0$ のとき，つまり $a\leqq\frac{3}{4}$ のとき．

$0\leqq x\leqq 1$ では

	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗	

最小値は

$h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

ii) $0<\frac{4a-3}{6}\leqq\frac{1}{2}$ のとき，つまり $\frac{3}{4}<a\leqq\frac{3}{2}$ のとき 1

x	0	…	$\frac{4a-3}{6}$	…	$\frac{1}{2}$	…
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$		↗		↘		↗

$h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$h(0)=\frac{-a+1}{4}>0$ より

最小値は $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

iii) $\frac{1}{2}<\frac{4a-3}{6}<1$ のとき つまり $\frac{3}{2}<a<\frac{9}{4}$ のとき

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{4a-3}{6}$	…	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗		↘		↗	

$h\left(\frac{4a-3}{6}\right)=\left(\frac{4a-3}{6}\right)^3-a\left(\frac{4a-3}{6}\right)^2+\left(a-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4a-3}{6}\right)+h(0)$

より

$h\left(\frac{4a-3}{6}\right)-h(0)=\left(\frac{4a-3}{6}\right)\left\{\left(\frac{4a-3}{6}\right)^2-a\left(\frac{4a-3}{6}\right)+\left(a-\frac{3}{4}\right)\right\}$

右辺は $\left(-\frac{2}{9}a^2+\frac{5}{6}a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4a-3}{6}\right)$ となり

$\frac{3}{2}<a<\frac{9}{4}$ において $-\frac{2}{9}a^2+\frac{5}{6}a-\frac{1}{2}>0$ $\frac{4a-3}{6}>0$ であるから

$h\left(\frac{4a-3}{6}\right)-h(0)>0$ ∴ 最小値は $h(0)=\frac{-a+1}{4}$

iv) $1\leqq\frac{4a-3}{6}$ のとき $\frac{9}{4}\leqq a$ のとき．

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$		↗		↘	

$h(0)=\frac{-a+1}{4}$ $h(1)=-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}$

$h(0)<h(1)$ より

最小値は $h(0)=\frac{-a+1}{4}$

以上より

$a\leqq 1$ のとき 最小値 0

$a>1$ のとき 最小値 $\frac{-a+1}{4}$