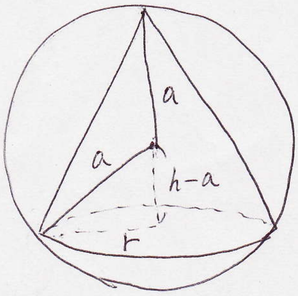
底面の半径が r, 高さが h の直円錐が半径 a の球に内接している。この直円錐の体積が最大になるような r, および h の値を求めよ。　〔長岡技科大〕



$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ …①

ここで左図より

$r^2=a^2-(h-a)^2$ であるから

$V=\frac{1}{3}\pi\{a^2-(h-a)^2\}h$ となり整理すると

$V=\frac{1}{3}\pi(-h^3+2ah^2)$ となる …②

ここで $f(h)=-h^3+2ah^2$ とおくとき、これが最大値をとれば②は最大になることから

$f'(h)=-3h^2+4ah$

$=h(-3h+4a)$

$h=0,\ \frac{4a}{3}$ で極値をとる

h	…	0	…	$\frac{4}{3}a$	…
$f'(h)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(h)$	↘	0	↗	$\frac{32}{27}a^3$	↘

右表より $h=\frac{4a}{3}$ で極大値 $\frac{32}{27}a^3$ となる …③

このとき

$r^2=a^2-\left(\frac{4}{3}a-a\right)^2$

$=\frac{8}{9}a^2$

$r>0$ より $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ …④

③④より $h=\frac{4a}{3}$ $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ を $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ に代入すると

$\frac{32}{81}\pi a^3$　　$\therefore\ h=\frac{4a}{3},\ r=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$