(1) $y=f(x)$が $x=1\pm\sqrt{3}$で極値をとるということは、

$x=1\pm\sqrt{3}$

$x-1=\pm\sqrt{3}$ 両辺2乗して

$x^2-2x+1=3 \rightarrow x^2-2x-2=0$

よって

$f'(x)=a(x^2-2x-2)$ となることが予想される…①

条件より

$f'(3)=4$であることから

①より

$f'(3)=a\cdot(9-6-2)=a=4$

$\therefore f'(x)=4x^2-8x-8$ となる。

したがって

$f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x^2-8x+C$ であり

$(3, f(3)) \rightarrow (3, -24+C)$であるからこの点における

接線の式は

$y=4(x-3)-24+C$

$y=4x-36+C$ これは $y=4x-27$と一致するので

$-36+C=-27 \quad C=9$

よって

$f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x^2-8x+9$

(2)

$g(x)=\frac{4}{3}x^3-4x^2-8x+9-(3x^2-14x)$ より

$g(x)=\frac{4}{3}x^3-7x^2+6x+9$ とおく

$g'(x)=4x^2-14x+6$

$=2(x-3)(2x-1)$

$g(x)$の増減表をかくと

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	3	…
$g'(x)$		+	0	−	0	+
$g(x)$	9	↗	$\frac{125}{12}$	↘	0	↗

となる

したがって $x\geqq 0$ において $g(x)\geqq 0$であるから

$f(x)\geqq 3x^2-14x$ が成り立つ