弘前大

(1)

$f(x)=x(x^2-4x+3)$

$f(x)=x^3-4x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-8x+3$

$f'(x)=0$を解くと

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$ となり

$\alpha=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$, $\beta=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ とおくと

x	…	α	…	β	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)=x^3-4x^2+3x$ を $f'(x)=3x^2-8x+3$ でわると

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{3}x-\frac{4}{9} \\
3x^2-8x+3\,\big)\,x^3-4x^2+3x \\
-)\ \ x^3-\frac{8}{3}x^2+x \\
\hline
-\frac{4}{3}x^2+2x \\
-)\ -\frac{4}{3}x^2+\frac{32}{9}x-\frac{4}{3} \\
\hline
-\frac{14}{9}x+\frac{4}{3}
\end{array}
$$

よって

$f(x)=(3x^2-8x+3)\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)-\frac{14}{9}x+\frac{4}{3}$

$f(\alpha)=-\frac{14}{9}\alpha+\frac{4}{3}$

$=\dfrac{-56+14\sqrt{7}}{27}+\dfrac{36}{27}$

$=\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}$

$f(\beta)=-\frac{14}{9}\beta+\frac{4}{3}$

$=\dfrac{-20-14\sqrt{7}}{27}$

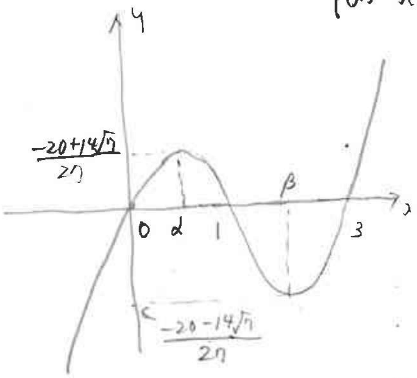
以上より

$f(x)$は $x=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$ のとき極大値 $\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}$

$x=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ のとき極小値 $\dfrac{-20-14\sqrt{7}}{27}$

をとる

(2) (1)のグラフをかくと $f(x)=x(x-1)(x-3)$



となる。

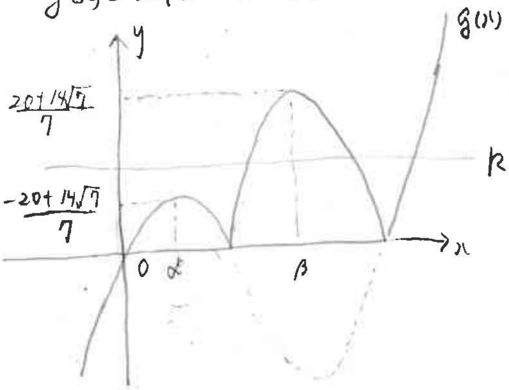
$x^2-4x+3\leqq 0$ とすると

$(x-1)(x-3)\leqq 0 \to 1\leqq x\leqq 3$ なのでこの区間だけ

グラフの正負を反対にすればよい

したがって

$g(x)=x|x^2-4x+3|$ のグラフは次のようになる



これより

$k>\dfrac{20+14\sqrt{7}}{7}$, $k<0$ … 1個

$k=\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}$ … 2個

$k=0$, $\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}<k<\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}$ … 3個

$k=\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}$ … 4個

$0<k<\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}$ … 5個