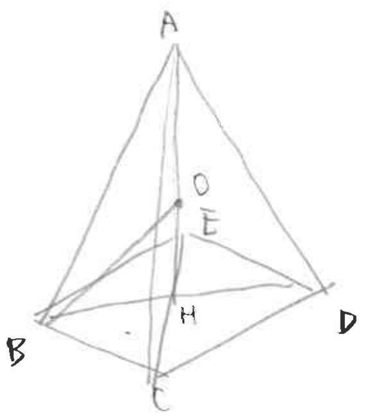
2019 KO Ⅲ-7.



球の中心をOとして、

点Aから底面への垂線をAHとする

球の半径は3で、AHをxとすると

$EH = x - 3$

$OB = 3$より △OBHで三平方の定理より

$BH = \sqrt{9-(x-3)^2} = \sqrt{6x - x^2}$　　∵ $0 < x < 6$

$BC = \sqrt{2}BH$より　$BC = \sqrt{12x - 2x^2}$

よって正四角すいの体積$V(x)$は

$V(x) = \frac{1}{3} BC^2 \cdot AH$

$= \frac{1}{3}(12x - 2x^2)x$

∴ $V(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2$

$V'(x) = -2x^2 + 8x$

$= -2x(x-4)$

x	0	…	4	…	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$\frac{64}{3}$	↘	

∴ $x = 4$で極大値をとり その値は $\frac{64}{3}$

したがって最大値は　$x = 4$のとき $\frac{64}{3}$