

【質問】

導関数の定義に従って、関数  $f(x) = x^3 - x$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) - (x^3 - x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 - 1 + 3xh + h^2 = 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$