(1)

接点の座標を (t, t^3+3t^2) とすると

$y'=3x^2+6x$ より 接線の式は

$y=(3t^2+6t)(x-t)+t^3+3t^2$ …①

この式が $(0,-5)$ を通るので

$-5=-t(3t^2+6t)+t^3+3t^2$

$-5=-3t^3-6t^2+t^3+3t^2$

$2t^3+3t^2-5=0$

$(t-1)(2t^2+5t+5)=0$

$2t^2+5t+5=0$ は実数解をもたないので

$t=1$

これを ① に代入して

$y=9x-5$ //

(2)

(1)の ① が $(0, a)$ を通ることより

$a=-t(3t^2+6t)+t^3+3t^2$

$-2t^3-3t^2=a$ …②

$f(t)=-2t^3-3t^2$

$g(t)=a$ とすると

$f(t)$ と $g(t)$ の異なる交点の個数が②の実数解の個数となる。つまりそれが接線の本数となる

$f'(t)=-6t^2-6t$

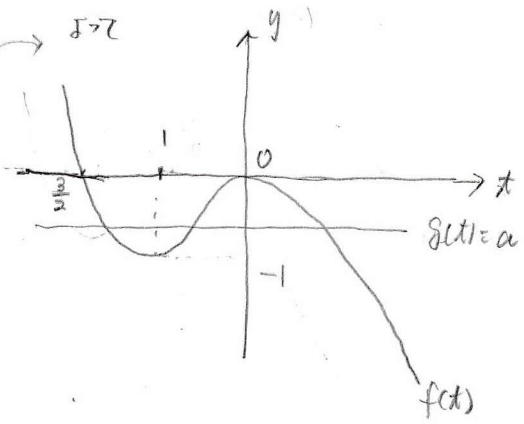
$=-6t(t+1)$

$f'(t)=0$ とすると $t=0,-1$

t	…	-1	…	0	…
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	-1	↗	0	↘

$f(t)=-t^2(2t+3)$

よって



$a>0$, $a<-1$ のとき 1本

$a=0, -1$ のとき 2本

$-1<a<0$ のとき 3本