en 5

2 つの円 $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$, $x^2 + 2x + y^2 = 1$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 2 つ円が異なる 2 点で交わることを示せ。

(2) 2 つの円の交点を P, Q とするとき, 直線 PQ の方程式を求めよ。

(3) (1) の交点 P, Q と点 (1, 0) を通る円の方程式を求めよ。

(1)

$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4=0 \rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5$ …円C_1

$(x+1)^2-1+y^2=1 \rightarrow (x+1)^2+y^2=2$ …円C_2

円C_1の中心 $(1,-2)$ 半径$\sqrt{5}$

円C_2の中心$(-1,0)$ 半径$\sqrt{2}$

円C_1と円C_2の中心間の距離 $\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2=7+2\sqrt{10}$

$(2\sqrt{2})^2=8$ より $\sqrt{5}+\sqrt{2}>2\sqrt{2}$ なので異なる2点で交わる

(2)

$x^2-2x+y^2+4y+k(x^2+2x+y^2-1)=0$ となる

これが直線を表すのは $k=-1$ のときであるから

$x^2-2x+y^2-4y-(x^2+2x+y^2-1)=0$

$-4x-4y+1=0$

(3) 求める円の式を

$x^2-2x+y^2+4y+k(x^2+2x+y^2-1)=0$ とおいて $(1,0)$ を代入

$1-2+k(1+2-1)=0$

$2k=1$

$k=\frac{1}{2}$

$x^2-2x+y^2+4y+\frac{1}{2}(x^2+2x+y^2-1)=0$

$2x^2-4x+2y^2+8y+x^2+2x+y^2-1=0$

$3x^2-2x+3y^2+8y-1=0$

$(x^2-\frac{2}{3}x)+(y^2+\frac{8}{3}y)=\frac{1}{3}$

$(x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}+(y+\frac{4}{3})^2-\frac{16}{9}=\frac{1}{3}$

$\frac{3}{9}+\frac{17}{9}$

$(x-\frac{1}{3})^2+(y+\frac{4}{3})^2=\frac{20}{9}$