次の問いに答えよ。

(1) 三角関数の加法定理またはド・モアブルの定理を用いて, 任意の角 θ に対し, 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(2) $\theta = 18^\circ$ のとき, $\cos 2\theta = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

〔熊本大〕

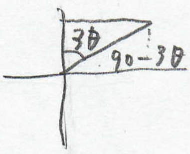
(1) 加法定理より

$$\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta$$
$$= \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + \cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos^2\theta$$
$$= \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$ …(証明終)

(2)

$5\theta = 90^\circ$

$$\cos 2\theta = \cos(\overset{5\theta}{90^\circ} - 3\theta) = \sin 3\theta$$



よって成り立つ

(3) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ と (2) より $\theta = 18^\circ$ として

$$\cos 2\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$1 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$$
$$(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$$
$$\sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$\therefore \sin\theta \neq 1$ X $\sin\theta > 0$ であるから $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$