

2022年定理4

次の設問に答えよ。

- (1) $\tan \theta$ が有理数ならば, $\cos 2\theta$ も有理数であることを示せ。
 (2) $\tan \theta$ が有理数ならば, $\sin 2\theta$ も有理数であることを示せ。

[小樽商船大]

$$(1) \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= 2\cos^2 \theta - 1$$

①より

$$\cos 2\theta = \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} - 1$$

∵ $\tan \theta$ が有理数ならば
 $\cos 2\theta$ も有理数である

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{①}$$

$$(2) \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta \quad \text{①より}$$

$$= 2 \tan \theta \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$

∵

$\tan \theta$ が有理数ならば $\sin 2\theta$ も有理数である。