加法定理5

ok

次の問いに答えなさい。

(1) 2つの式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ を使って, $\cos 5\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表しなさい。

(2) $\cos^2 18^\circ$ の値を求めなさい。

〔福島大〕

(1) $\cos 5\theta = \cos(2\theta + 3\theta)$

$= \cos 2\theta \cos 3\theta - \sin 2\theta \sin 3\theta$

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 2\sin\theta\cos\theta(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

$= \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(4\cos^2\theta - 3) - 2\sin^2\theta\cos\theta(3 - 4\sin^2\theta)$ …①

とし $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を代入すると

① $= \cos\theta(\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta)(4\cos^2\theta - 3) - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta\{3 - 4(1 - \cos^2\theta)\}$

$= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1)(4\cos^2\theta - 3) - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta)(4\cos^2\theta - 1)$

$= (2\cos^3\theta - \cos\theta)(4\cos^2\theta - 3) - (2\cos\theta - 2\cos^3\theta)(4\cos^2\theta - 1)$

$= 8\cos^5\theta - 6\cos^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta - (8\cos^3\theta - 2\cos\theta - 8\cos^5\theta + 2\cos^3\theta)$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ …(答)

(2) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ で $\theta = 18^\circ$ とすると

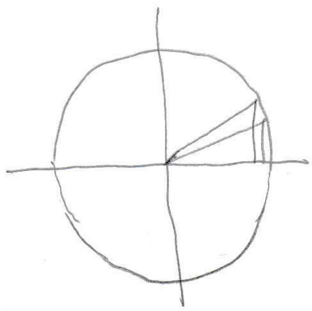
$16\cos^5 18^\circ - 20\cos^3 18^\circ + 5\cos 18^\circ = 0$ …① ①で $\cos 18^\circ = x$ とおくと

$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$

$x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0$ $x \neq 0$ である. また $x^2 = X$ として

$16X^2 - 20X + 5 = 0$ とおき X を求めると

$X = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 80}}{16} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$



$\cos^2 18^\circ > \cos^2 30^\circ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ より

$X = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{8}$ つまり $\cos^2 18^\circ = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{8}$