Kinoholl

すべての正の整数 n に対して，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leqq \frac{2n-1}{n}$$

$n=1$のとき　$1 \leqq 1$ で等号が成り立つ.

$n=k$のとき　与式の不等式が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2} \leqq \frac{2k-1}{k}$$ が成り立ち.

$n=k+1$のとき、両辺に $\frac{1}{(k+1)^2}$ を加えると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} \leqq \frac{2k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$\frac{2k-1}{k}=2-\frac{1}{k}$ として

$2-\frac{1}{k+1}$ と $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$ の大小を調べると

$$\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\frac{-k(k+1)+(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{-k^2}\cancel{-k}+\cancel{k^2}+\cancel{2k}+1\cancel{-k}}{k(k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$ つまり $2-\frac{1}{k+1}>2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

よって $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} \leqq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k+1}$

したがって $n=k+1$のときも成り立つ

ゆえに

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leqq \frac{2n-1}{n}$$ $(n=1,2,3\cdots)$

が成り立つ.